Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Devoir 1

corrigé

Exercice I

1. On a

$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$. On a

$$v_n = \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

ce qui donne le résultat voulu.

2. On a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_{n+1}} > 0$$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

3. Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, on a $u_i \geq 2$ donc $u_0 u_1 \dots u_k \geq 2^{k+1}$, ainsi

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ \frac{1}{u_0 u_1 \dots u_k} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$$

ainsi

$$v_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}}$$

en raisonnant comme à la question 1, il vient

$$v_n \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

par suite $v_n < 1$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc majorée.

4. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, image de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par ϕ est croissante et majorée, elle est donc convergente. On a $v_n \leq 1$ pour tout entier n donc

$$\lim v_n \leq 1$$

En outre $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante donc $v_n > v_0 = \frac{1}{u_0}$, donc $\lim v_n \geq \frac{1}{u_0}$ ainsi

$$\lim v_n > 0$$

On en déduit que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim v_n \in]0, 1]$$

L'application ψ est donc bien définie.

Exercice II

1. Démontrons $(\mathcal{H}_n)$ par récurrence.

Initialisation.

Première assertion. On a $x \in]0,1]$ donc $\frac{1}{x} \geq 1$ ainsi $\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \geq 1$ donc

$$u_0 = \mathrm{E}(\frac{1}{x}) + 1 \geq 2$$

ce qui établit la première assertion de $(\mathcal{H}_0)$.

Deuxième assertion. Par définition de la partie entière, $\mathrm{E}(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} < \mathrm{E}(\frac{1}{x}) + 1$, ce qui implique les quatre lignes suivantes :

$$\begin{array}{rcccl} u_0 - 1 & \leq & \frac{1}{x} & < & u_0 \\ \frac{1}{u_0} & < & x & \leq & \frac{1}{u_0 - 1} \\ 0 & < & x - \frac{1}{u_0} & \leq & \frac{1}{u_0-1} - \frac{1}{u_0} \\ 0 & < & x - \frac{1}{u_0} & \leq & \frac{1}{u_0(u_0-1)} \end{array}$$

ce qui établit la deuxième assertion de $(\mathcal{H}_0)$. Cela conclu la démonstration de $(\mathcal{H}_0)$.

Hérédité.

Première assertion. Supposons $(\mathcal{H}_n)$ vraie, alors

$$0 < x - \left(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n}\right) \leq \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_n(-1 + u_n)}$$

ce qui implique les quatre lignes suivantes

$$\begin{array}{rcl} 0 < x u_0 u_1 \ldots u_n - u_1 \ldots u_n - \cdots - u_n - 1 & \leq & \frac{1}{-1+u_n} \\ \frac{1}{x u_0 u_1 \ldots u_n - u_1 \ldots u_n - \cdots - u_n - 1} & \geq & -1 + u_n \\ \mathrm{E}\left(\frac{1}{x u_0 u_1 \ldots u_n - u_1 \ldots u_n - \cdots - u_n - 1}\right) & \geq & \mathrm{E}(u_n) - 1 \\ \mathrm{E}\left(\frac{1}{x u_0 u_1 \ldots u_n - u_1 \ldots u_n - \cdots - u_n - 1}\right) & \geq & 1 \end{array}$$

ce qui établit la première assertion de $(\mathcal{H}_{n+1})$.

Deuxième assertion. Par définition de la partie entière on a $\mathrm{E}(a) \leq a < \mathrm{E}(a) + 1$, en particulier pour $a = 1/(x u_0 u_1 u_2 \ldots u_n - u_1 u_2 \ldots u_n - u_2 \ldots u_n - \cdots - 1)$, cela implique les six lignes suivantes

$$\begin{array}{rcccl} u_{n+1} - 1 & \leq & \frac{1}{x u_0 u_1 u_2 \ldots u_n - u_1 u_2 \ldots u_n - u_2 \ldots u_n - \cdots - 1} & < & u_{n+1} \\ \frac{1}{u_{n+1}} & < & x u_0 u_1 u_2 \ldots u_n - u_1 u_2 \ldots u_n - u_2 \ldots u_n - \cdots - 1 & \leq & \frac{1}{u_{n+1}-1} \\ 1 & < & x u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n+1} - u_1 u_2 \ldots u_{n+1} - \cdots - u_{n+1} & \leq & \frac{u_{n+1}}{u_{n+1}-1} \\ 0 & < & x u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n+1} - u_1 u_2 \ldots u_{n+1} - \cdots - u_{n+1} - 1 & \leq & \frac{1}{u_{n+1}-1} \\ 0 & < & u_0 u_1 u_2 \ldots u_{n+1}\left(x - \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_0 u_1} - \cdots - \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_{n+1}}\right) & \leq & \frac{1}{u_{n+1}-1} \\ 0 & < & x - \left(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0 u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_{n+1}}\right) & \leq & \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_{n+1}(u_{n+1}-1)} \end{array}$$

ce qui établit la deuxième assertion de $(\mathcal{H}_{n+1})$. Cela conclu la démonstration de $(\mathcal{H}_{n+1})$.

2. Soit $x \in]0,1]$. Considérons la suite $u = (u_n)_{n\in N}$ définie à la question précédente.

Démontrons que $u \in A$. Par construction, pour tout entier naturel n on a $u_n \in \mathbb{N}$. En vertu de la question précédente on a également $u_0 \geq 2$. Il reste à démontrer la croissance de u. Soit $n \in \mathbb{N}$, la deuxième assertion de $(\mathcal{H}_n)$ donne

$$x - \left(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0u_1u_2\ldots u_n}\right) \leq \frac{1}{u_0u_1u_2\ldots u_n}\frac{1}{-1+u_n}$$

ce qui implique les cinq lignes suivantes

$$\begin{array}{rcl}
xu_0u_1u_2\ldots u_n \ - \ u_1u_2\ldots u_n \ - \ u_2\ldots u_n \ - \ \cdots \ - \ 1 & \leq & \frac{1}{-1+u_n} \\
\frac{1}{xu_0u_1u_2\ldots u_n \ - \ u_1u_2\ldots u_n \ - \ u_2\ldots u_n \ - \ \cdots \ - \ 1} & \geq & -1+u_n \\
\mathrm{E}\left(\frac{1}{xu_0u_1u_2\ldots u_n \ - \ u_1u_2\ldots u_n \ - \ u_2\ldots u_n \ - \ \cdots \ - \ 1}\right) & \geq & -1+\mathrm{E}(u_n) \\
\mathrm{E}\left(\frac{1}{xu_0u_1u_2\ldots u_n \ - \ u_1u_2\ldots u_n \ - \ u_2\ldots u_n \ - \ \cdots \ - \ 1}\right)+1 & \geq & u_n \\
u_{n+1} & \geq & u_n
\end{array}$$

ce qui établit que u est croissante et par suite $u \in A$.

Démontrons que $\psi(u) = x$. Notons $v = \phi(u)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, la deuxième assertion de $(\mathcal{H}_n)$ donne

$$0 < x - v_n \leq \frac{1}{u_0u_1u_2\ldots u_n}\frac{1}{-1+u_n}$$

Comme tous les termes de u sont supérieurs à 2, il vient

$$0 < x - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}\frac{1}{-1+u_n} \leq \frac{1}{2^{n+1}}$$

or $\lim \frac{1}{2^{n+1}} = 0$ donc $\psi(u) = \lim v_n = x$.

Conclusion. Pour tout $x \in]0,1]$, il existe $u \in A$ tel que $x = \psi(u)$. Ainsi ψ est surjective.

3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites distinctes. Il existe $k \in \mathbb{N} \cup -1$ tel que

$$\left\{\begin{array}{l} \forall n \leq k, \ u_n = u'_n \\ u_{k+1} \neq u'_{k+1} \end{array}\right.$$

Sans perte de généralité et quitte à renommer les deux suites, on peut supposer que $u_{k+1} < u'_{k+1}$. Comme ces quantités sont entières cela entraine

$$1 + u_{k+1} <= u'_{k+1}$$

Notons $v = \phi(u)$ et $v' = \phi(u')$, on a

$$v_k = v'_k$$

Soit $n > k$, en vertu de la croissance de v on a

$$v_k + \frac{1}{u_0u_1\ldots u_{k+1}} \leq v_n$$

en outre, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$$\frac{1}{u_0\ldots u_{k+1}} + \frac{1}{u_0\ldots u_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{u_0\ldots u_n} \leq \frac{1}{u_0\ldots u_k}\left[\frac{1}{u_{k+1}} + \frac{1}{u_{k+1}^2} + \cdots + \frac{1}{u_{k+1}^{n-k}}\right]$$

ainsi

$$v_k + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_{k+1}} \leq v_n \leq v_k + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_k} \frac{1}{u_{k+1}} \frac{1 - \left(\frac{1}{u_{k+1}}\right)^{n-k}}{1 - \frac{1}{u_{k+1}}}$$

lorsque n tend vers $+\infty$, il vient

$$v_k + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_{k+1}} < \psi(u) \leq v_k + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_k} \frac{1}{u_{k+1} - 1} \tag{1}$$

La première inégalité etant strcite en vertu de la croissance de v. De manière analogue

$$v'_k + \frac{1}{u'_0 u'_1 \ldots u'_{k+1}} < \psi(u') \leq v'_k + \frac{1}{u'_0 u'_1 \ldots u'_k} \frac{1}{u'_{k+1} - 1} \tag{2}$$

Or $v'_k + \frac{1}{u'_0 \ldots u'_k} \frac{1}{u'_{k+1} - 1} = v_k + \frac{1}{u_0 \ldots u_k} \frac{1}{u'_{k+1} - 1}$, en outre $u'_{k+1} - 1 \geq u_{k+1}$ donc $\frac{1}{u'_{k+1} - 1} \leq \frac{1}{u_{k+1}}$ donc

$$v'_k + \frac{1}{u'_0 \ldots u'_k} \frac{1}{u'_{k+1} - 1} \leq v_k + \frac{1}{u_0 u_1 \ldots u_{k+1}}$$

L'inégalité de droite de (1) et l'ingégalité de gauche de (2) donnent alors $\psi(u') < \psi(u)$. Ainsi

$$u \neq u' \;\Rightarrow\; \psi(u) \neq \psi(u')$$

ainsi ψ est injective. Comme on a montré que ψ est surjective il vient que ψ est bijective.