Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2010

Devoir 1

A rendre le 6/12/2005

Dans tout le devoir nous noterons A l'ensemble des suites croissantes $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres entiers telles que $u_0 \geq 2$. Les fonctions ϕ et ψ définies dans l'exercice I seront utilisées dans l'exercice II.

Exercice I

Soit ϕ l'application de A dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites, définie pour tout $u \in A$ par $\phi(u) = v$ où $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donné par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0u_1} + \frac{1}{u_0u_1u_2} + \cdots + \frac{1}{u_0u_1u_2\dots u_n}$$

1. Montrer que si u est la suite constante égale à 2 alors $v = \phi(u)$ est définie par $v_n = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$

2. Montrer que pour tout $u \in A$, la suite $v = \phi(u)$ est strictement croissante.

3. Montrer que pour tout $u \in A$, la suite $v = \phi(u)$ est majorée par 1.

4. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rccl} \psi & : & A & \rightarrow &]0,1] \\ & & u & \mapsto & \lim \phi(u) \end{array}$$

est bien définie

Exercice II

1. Soit $x \in]0,1]$, et $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \\ u_{n+1} = \mathrm{E}\left(\frac{1}{xu_0u_1u_2\dots u_n - u_1u_2\dots u_n - u_2\dots u_n - \cdots - 1}\right) + 1, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Soit $(\mathcal{H}_n)$ l'hypothèse

$$\begin{cases} u_n \geq 2 \\ 0 < x - \left(\frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_0u_1} + \cdots + \frac{1}{u_0u_1u_2\dots u_n}\right) \leq \frac{1}{u_0u_1u_2\dots u_n}\frac{1}{-1+u_n} \end{cases}$$

Montrer, par récurrence sur n, que $(\mathcal{H}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que l'application ψ est surjective.

3. Montrer que l'application ψ est bijective.