Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S2 – Année 2005-2006
CS 103 – Analyse I — Promotion ESILV 2010

Correction des exercices de la feuille 8

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice III

1. On a

$$\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus \overset{\circ}{(A \cup B)}$$

or on a vu que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, en outre $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{(A \cup B)}$ donc pour une partie E de $\mathbb{R}$ on a $E \setminus \overset{\circ}{(A \cup B)} \subset E \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})$. En particulier pour $E = \overline{A} \cup \overline{B}$, il vient

$$\begin{aligned}
\partial(A \cup B) &\subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}) \\
&\subset (\overline{A} \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})) \cup (\overline{B} \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})) \\
&\subset (\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}) \cup (\overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}) \\
&\subset (\partial A) \cup (\partial B)
\end{aligned}$$

En revanche, l'inclusion réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple suivant :

A	B	$A \cup B$	∂A	∂B	$(\partial A) \cup (\partial B)$	$\partial(A \cup B)$	Conclusion
$[1;3]$	$[2;4]$	$[1;4]$	$\{1;3\}$	$\{2;4\}$	$\{1;2;3;4\}$	$\{1;4\}$	$(\partial A) \cup (\partial B) \not\subset \partial(A \cup B)$

2. Dans le cas général, il n'y a ni inclusion dans un sens, ni d'en l'autre ; comme le montrent les contre-exemples suivants :

A	B	$A \cap B$	∂A	∂B	$(\partial A) \cap (\partial B)$	$\partial(A \cap B)$	Conclusion
$\mathbb{R}$	$\{1\}$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\emptyset$	$\{1\}$	$\partial(A \cap B) \not\subset (\partial A) \cap (\partial B)$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$(\partial A) \cap (\partial B) \not\subset \partial(A \cap B)$

Exercice IV

1. Dans le cas général, il n'y a ni inclusion dans un sens, ni d'en l'autre ; comme le montrent les contre-exemples suivants :

A	$\overset{\circ}{A}$	∂A	$\partial(\overset{\circ}{A})$	$\overset{\circ}{(\partial A)}$	Conclusion
$[1;2]$	$]1;2[$	$\{1,2\}$	$\{1,2\}$	$\emptyset$	$\partial(\overset{\circ}{A}) \not\subset \overset{\circ}{(\partial A)}$
$\mathbb{Q} \cap [1;2]$	$\emptyset$	$[1,2]$	$\emptyset$	$\{1;2\}$	$\overset{\circ}{(\partial A)} \not\subset \partial(\overset{\circ}{A})$

2. Commençons par remarquer que l'adherence de tout ensemble est un fermé. En effet pour $E \subset \mathbb{R}$ on a $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{E} \cap (\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{E}) = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus E}$ est l'intersection de deux fermés. En outre $\partial\overline{A} = \overline{\overline{A}} \setminus \overset{\circ}{\overline{A}}$, or $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$, par suite $\partial\overline{A} \subset \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A$ donc $\overline{\partial(\overline{A})} \setminus \overline{\partial A}$, mais $\partial(\overline{A})$ est un fermé selon la remarque préliminaire, donc égal à son adhérence. Il en résulte que

$$\partial(\overline{A}) \subset \overline{\partial A}$$

En revanche, l'inclusion réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple suivant :

A	$\overline{A}$	∂A	$\partial(\overline{A})$	$\overline{(\partial A)}$	Conclusion
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	$\{0\}$	$\emptyset$	$\{0\}$	$\overline{(\partial A)} \not\subset \partial(\overline{A})$

3. La réponse est non comme le montre $A = [0;1] \cap \mathbb{Q}$, on a alors $\partial A = [0;1]$ et $\partial\partial A = \{1;2\}$.

Exercice V

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \overline{A}$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on a

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \emptyset$$

donc $x \in A^n$.

2. Soit $y \in A^n$ alors

$$]y-\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$$

Soit alors x dans cette intersection, on a

$$y+\frac{1}{n} > x \quad \text{et} \quad y-\frac{1}{n} < x$$

donc

$$y \in]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$$

ainsi

$$y \in \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$$

donc

$$A^n \subset \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$$

Réciproquement, soit $y \in \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ alors il existe $x \in A$ tel que $y \in \cup_{x\in A}]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ donc $x+\frac{1}{n} > y$ et $x-\frac{1}{n} < y$ donc $]y-\frac{1}{n}, y+\frac{1}{n}[\cap A \neq \emptyset$ donc $y \in A^n$. Conclusion :

$$A^n \subset \cup_{x\in A}\left]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}\right[$$

3. Selon la question précédente, A^n est une réunion d'ouverts. Donc A^n est un ouvert.

4. Selon la question 1, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\overline{A} \subset A^n$ donc

$$\overline{A} = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} A^n$$

5. Soit A un fermé. Alors $A = \overline{A}$. Selon la question précédente on a alors

$$A = \cap_{n\in\mathbb{N}^*} A^n$$

Selon la question 3, tous les A^n sont des ouverts. Par ailleurs $\mathbb{N}^*$ est dénombrable, en conséquence A est l'intersection dénombrable d'enembles fermés.

Cela n'est plus vrai si on remplace dénombrable par fini. Il suffit de prendre comme contre exemple n'importe quel fermé qui n'est pas ouvert (c'est-à-dire n'importe quel fermé qui n'est ni $\mathbb{R}$ ni $\emptyset$) en effet l'intersection finie d'ouverts est un ouvert.

Exercice VI

1. Soit $x \in A \cap \overline{B}$. Comme $x \in \overline{B}$, il existe (u_n) suite d'éléments de B qui converge vers x. D'autre part, comme $x \in A$ et que A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$. Comme $\lim u_n = x$, il existe un rang N tel que $n > N$ entraine $|u_n - x| < \varepsilon$. Donc pour $n > N$ on a $u_n \in A$. Par suite $u_n \in A \cap B$. Il existe donc une suite d'éléments de $A \cap B$ (par exemple la suite extraite de (u_n) des termes dont l'indice est strictement supérieur à N) qui converge vers x. Donc $x \in \overline{A \cap B}$. Ainsi $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

2. L'inclusion $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$ n'est pas vraie sans l'hypothèse A ouvert comme le montre le contre-exemple suivant : $A =]0,1]$ et $B =]1,2[$.

3. Il suffit de prendre $A =]0,2[\cup]3,4[$ et $B =]1,3[$.

Exercice VII

1. L'élément x appartient à $(A \cup B)^*$ implique les 6 lignes suivantes :

$$\exists \varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap(A \cup B) = \{x\}$$

$$\exists \varepsilon > 0, (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A) \cup (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap B) = \{x\}$$

$$\exists \varepsilon > 0, (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A) = \{x\} \text{ ou } (]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap B) = \{x\}$$

$$x \in A^* \text{ ou } x \in B^*$$

$$x \in A^* \cup B^*$$

Ainsi $(A \cup B)^* \subset A^* \cup B^*$. L'inclusion réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant

$$A = \mathbb{Q}, \ B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

en effet $A^* = \emptyset$ et $B^* = \emptyset$ donc $A^* \cup B^* = \emptyset$ pourtant $(A \cup B)^* = \mathbb{R}$.

2. Soit $x \in (A^* \cap B^*)$ alors $x \in A^*$ et $x \in B^*$ donc

$$\begin{cases} \exists \varepsilon_1 > 0,]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\cap A = \{x\} \\ \exists \varepsilon_2 > 0,]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\cap B = \{x\} \end{cases}$$

posons alors $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap(A \cap B) = \{x\}$$

donc $x \in (A \cap B)^*$. Ainsi $A^* \cap B^* \subset (A \cap B)^*$. L'inclusion réciproque est fausse comme le montre le contre-exemple suivant

$$A = \{0\}, \ B = \mathbb{R}$$

en effet $A^* = A$ et $B^* = \emptyset$ donc $A^* \cap B^* = \emptyset$ pourtant $(A \cap B)^* = A^* = \{0\}$.