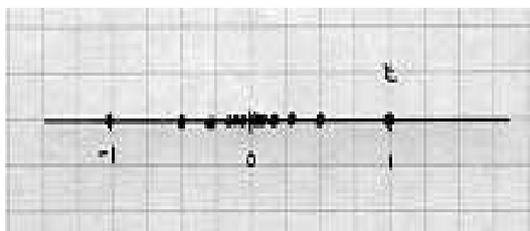


## Correction des exercices de la feuille 6

*Exercices non corrigés en travaux dirigés*

### Exercice VI

1.



2. Considérons  $A = \mathbb{R} \setminus E$ . Soit  $\varepsilon > 0$ , il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$  (il suffit de prendre  $n = E(\frac{2}{\varepsilon})$ ). On a donc  $\frac{1}{n} \in ]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[$ , or  $\frac{1}{n} \in E$  donc  $\frac{1}{n} \notin A$ . Par suite

$$]0 - \varepsilon, 0 + \varepsilon[ \not\subset A$$

il en résulte que  $A$  n'est pas voisinage de 0. On a  $0 \notin E$  donc  $0 \in A$  donc  $A$  n'est pas un ouvert. Ainsi  $E$  n'est pas un fermé.

### Exercice VII

Supposons que  $A$  ou  $B$  est ouvert. Sans perte de généralité on peut supposer que c'est  $A$ .

- Si  $A$  ou  $B$  est vide alors  $A + B$  est vide, dans ce cas  $A$  ou  $B$  ouvert implique  $A + B$  ouvert.
- Sinon, soit  $x \in A + B$ . Il existe  $a \in A$  et  $b \in B$  tels que  $x = a + b$ . Comme  $A$  est ouvert,  $\exists \varepsilon > 0$  tel que  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \subset A$ . Alors  $]a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon[ \subset A + B$ , ce qui donne

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset A + B$$

donc  $A + B$  est voisinage de  $x$ . Ainsi  $A + B$  est un ouvert.

La réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple suivant :  $A = [0, +\infty[$ ,  $B = ]-\infty, 0]$ ,  $A + B = \mathbb{R}$ .