# Feuille d'exercices 5

*Suites récurrentes*

## Exercice I

On considère la *suite de Fibonacci*[1] définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$$

**1.** Déterminer le terme général de cette suite

**2.** Que vaut $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ?

## Exercice II

Calculer les premiers termes des suites suivantes, au moyen d'un graphe

**1.** $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 3u_n$ pour $n \geq 0$

**2.** $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n$ pour $n \geq 0$

## Exercice III

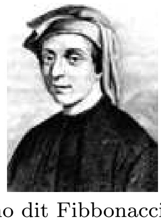
On considére la relation de recurrence $u_{n+1} = (u_n)^2$

**1.** Quels sont le ou les équilibres de cette relation et dites s'ils sont stables ou instables.

**2.** Au moyen d'un graphe, determinez la valeur des 4 premiers termes de la suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{1}{2}$.

---

[1]Leonardo Pisanno, surnomé Fibonnaci, est un mathématicien italien du début du XIIIe siècle. Il passa son enfance en Afrique du Nord où son père dirigeait une sorte de comptoir. C'est ainsi qu'il eut l'occasion d'étudier les travaux algébriques d'al-Khuwārizmī. Par la suite il voyagea dans le monde méditerranéen recontrant de nombreux scientifiques et prenant connaissance des différents systèmes de calculs en usage. De retour à Pise, il publie *Liber abaci* où il expose le système de numération indo-arabe et le compare au système romain. Il est le premier grand mathématicien occidental à l'adopter et à le vulgariser auprès des scientifiques. Fibonacci poursuivit également ses propres travaux, il est à l'origine de cette suite récurrente, qui décrit la démographie d'une population de lapins.



Leonardo Pisano dit Fibbonacci ($\sim$ 1170–1250)

## Exercice IV

On souhaite étudier la suite définie par:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{u_n^2+1} \text{ pour } n \geq 0 \end{cases}$$

**1.** Montrer que $\forall\, n \geq 0, u_n \in [0, +\infty[$.

**2.** En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroit.

**3.** Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

## Exercice V

Déterminer $u_1$ pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n \end{cases}$$

soit à termes positifs.

## Exercice VI

Considérons, pour tout $n \geq 0$ entier, la relation de récurrence

$$u_{n+1} = 4u_n - u_n^2 \tag{1}$$

**1.** Determiner les équilibres de (1).

**2.** Déterminer la nature de chaque équilibre trouvé

**3.** Determiner graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ issue de la condition initiale $u_0 = -1$, puis de $u_0 = 1$ et de $u_0 = \frac{1}{5}$.

**4.** On suppose que $u_0 \in [0; 4]$

**a.** Considérons

$$\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{u_0}{4}}$$

c'est-à-dire $\alpha \in [-1; 1]$ tel que $u_0 = 4\sin^2\alpha$. Montrer que $u_n = 4\sin^2(2^n\alpha)$.

**b.** Montrer que $\lim u_n = 0$ si et seulement si $\alpha = \frac{k\pi}{2^N}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $k$ entier dans $[0, 2^{N-1}]$.

**c.** Montrer que $\lim u_n = 3$ si et seulement si $\alpha = \frac{k\pi}{3\times 2^N}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et $k$ entier dans $[0, 2^{N-1}]$, non multiple de 3.

**5.** On suppose que $u_0 \in ]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$. Montrer que si $u_0 < 0$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq 4^n u_0$$

En déduire la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.