Correction des exercices de la feuille 4

Exercices non corrigés en travaux dirigés dans le groupe 1

Exercice I

Pour α et β fixés notons $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

1. Etudions d'abord le cas $\alpha < 1$. Choisissons $a > 0$ de sorte que $\alpha + a$ soit encore strictement inférieur à 1, par exemple $a = \frac{1}{2}(1-\alpha)$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\beta}{n^a} = 0 \tag{1}$$

Cela est clair si $\beta \leq 0$ (ce n'est pas une forme indeterminée) et si $\beta > 0$, c'est une conséquence de $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n^\gamma} = 0$ avec $\gamma = \frac{a}{\beta} > 0$. Ainsi (1) donne

$$\forall\epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{(\ln n)^\beta}{n^a}\right| < \epsilon$$

En particulier pour $\epsilon = 1$, il existe un entier n_0 à partir duquel

$$(\ln n)^\beta \leq n^a$$

donc

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n^{\alpha+a}}$$

En conséquence

- $u_n \geq \frac{1}{n^{\alpha+a}}$ pour $n \geq n_0$
- (u_n) est à termes positifs pour $n \geq n_0$
- $\sum_{n\geq n_0} \frac{1}{n^{\alpha+a}}$ diverge puisque c'est une série de Riemann avec $\alpha + a < 1$

par le théorème de comparaison $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est divergente. Comme la nature d'une série n'est pas affectée par ses premiers termes, S diverge.

Etudions à présent le cas $\alpha > 1$. On peut choisir $a > 0$ de sorte que $\alpha - a > 1$, par exemple $a = \frac{1}{2}(\alpha - 1)$. On démontre de manière analogue au cas précédent que

$$(\ln n)^\beta \geq n^{-a}$$

à partir d'un rang n_0. Donc

$$\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \leq \frac{1}{n^{\alpha-a}}$$

En conséquence

- $u_n \leq \frac{1}{n^{\alpha+a}}$ pour $n \geq n_0$
- (u_n) est à termes positifs pour $n \geq n_0$
- $\sum_{n\geq n_0} \frac{1}{n^{\alpha-a}}$ converge puisque c'est une série de Riemann avec $\alpha - a > 1$

par le théorème de comparaison $\sum_{\geq n_0} u_n$ est divergente. Comme la nature d'une série n'est pas affectée par ses premiers termes, S converge.

2. Si $\beta \leq 0$ alors, pour $n > 2$, $(\ln n)^\beta \leq 1$. Ainsi,

$$\frac{1}{n(\ln n)^\beta} \geq \frac{1}{n}$$

Comme $u_n \geq 0$, le théorème de comparaison d'applique et donne la divergence de S.

3. Plaçons-nous sur l'intervalle $]e; +\infty[$. On a

$$f_\beta(x) = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^\beta} = \frac{\ln'(x)}{\ln(x)^\beta}$$

Ainsi, lorsque $\beta \neq 1$ on a

$$F_\beta = \frac{1}{(1-\beta)\,(\ln x)^{\beta-1}}$$

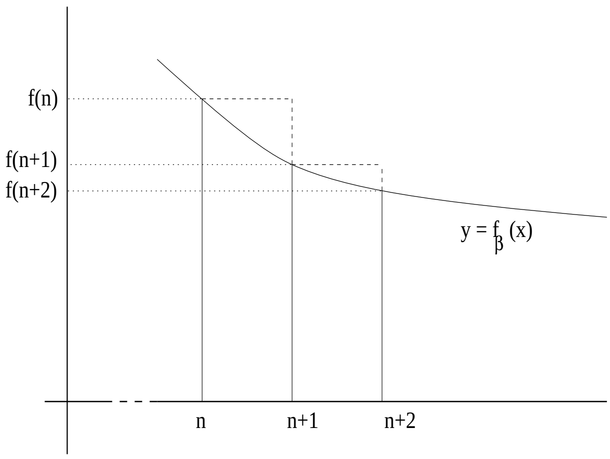
et lorsque $\beta = 1$ on a

$$F_1(x) = \ln(\ln x)$$

4. Une étude rapide de la dérivée de f_β montre que cette fonction est décroissante à partir de e. Plaçons nous dans l'intervalle $]e; +\infty[$.

$$f_\beta(n+1) \leq \int_n^{n+1} f_\beta(x)\,dx \leq f_\beta(n) \tag{2}$$

On remarque que cette inégalité est conforme à l'interprétation géométrique selon laquelle l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = n$ et $x = n+1$ est supérieure à l'aire du rectangle dont les sommets sont $(n; 0)$, $(n+1; 0)$, $(n+1; f(n))$, $(n; f(n))$ et inférieure à l'aire du rectangle dont les sommets sont $(n; 0)$, $(n+1; 0)$, $(n+1; f(n+1))$, $(n, f(n+1))$.



L'inégalité (2) donne

$$\sum_{n=3}^{N-1} f_\beta(n+1) \leq \sum_{n=3}^{N-1} \int_n^{n+1} f_\beta(x)\,dx \leq \sum_{n=3}^{N-1} f_\beta(n)$$

donc

$$\sum_{n=4}^{N} f_\beta(n) \leq \int_3^N f_\beta(x)\,dx \leq \sum_{n=3}^{N-1} f_\beta(n)$$

donc

$$\sum_{n=4}^{N} u_n \leq F_\beta(N) - F_\beta(3) \tag{3}$$

$$\sum_{n=3}^{N-1} u_n \geq F_\beta(N) - F_\beta(3) \tag{4}$$

Lorsque $\beta > 1$ on a $\lim_{x\to+\infty} F_\beta(x) = 0$, l'inéquation (3) donne que la suite des sommes partielles est majorée, en outre elle est croissante puisque $u_n \geq 0$ ainsi S converge.

Lorsque $\beta \leq 1$ on a $\lim_{x\to+\infty} F_\beta(x) = +\infty$ donc l'inéquation (4) on a la divergence de S.

5. La série

$$S = \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

est convergente si et seulement si $\alpha > 1$ ou bien si $\alpha = 1$ et $\beta > 1$.

Exercice II

Posons $u_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$, on a

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{u_n} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \\
&= \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - ln(1-0)}{\frac{1}{n} - 0}\right)
\end{aligned}$$

Posons $f(x) = \ln(1-x)$ on a $f'(x) = \frac{-1}{1-x}$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) - ln(1-0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = -1$$

Ainsi $\lim \sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{e} < 1$. La suite (u_n) est à termes positifs, le critère de Cauchy permet de conclure que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge.

Exercice V

1. Soit $u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n}$. Comme $a_n \leq 9$ on a

$$\begin{aligned}
u_N &\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} \\
&\leq 9 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{10^n} \\
&\leq 9 \frac{1}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^N}{1 - \frac{1}{10}} \\
&\leq 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^N \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

D'autre part $u_{N+1} - u_N = \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}} \geq 0$ donc (u_n) est croissante et majorée, ainsi elle est convergente. Comme $0 \leq u_N \leq 1$ on a $0 \leq \lim_{N \to +\infty} u_N \leq 1$. Ainsi (u_N) converge vers un réel x de $[0;1]$.

2. Réciproquement, soit $x \in [0;1]$. Si $x < 1$ il suffit de poser a_n égale la n-ième décimale de x. Si $x = 1$ on pose $a_n = 9$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en effet

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} = 1$$

3. Le développement décimale n'est pas nécessairement unique. Par exemple $x = 0,5$ peut également s'écrire $x = 0,4999\ldots$. Plus géneralement

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \ldots a_n 000 \ldots} \tag{5}$$

avec $a_n \neq 0$ peut aussi s'écrire[1]

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \ldots (a_n - 1) 999 \ldots} \tag{6}$$

En effet

$$\sum_{i=n}^{N} \frac{9}{10^i} = 9 \sum_{i=n}^{N} \frac{1}{10^i} = 9 \frac{1}{10^n} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{N-n+1}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10^{n-1}} \left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^{N-n+1}\right)$$

donc $\lim_{N \to +\infty} \sum_{i=n}^{N} \frac{9}{10^i} = \frac{1}{10^{n-1}}$.

4. Supposons donc qu'il existe une bijection

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow & [0;1] \\ & n & \mapsto & x_n \end{array}$$

Notons a_{in} la i-ième décimale de x_n.

$$x_n = \overline{0, a_{1n} a_{2n} \ldots a_{nn} \ldots}$$

on construit

$$y = \overline{0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots}$$

avec

$$\begin{cases} b_i = 1 \text{ si } a_{ii} \neq 1 \\ b_i = 2 \text{ si } a_{ii} = 1 \end{cases}$$

c'est un développement décimal propre de $y \in]0;1[$.

Il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$ tel que $y = x_p$ car $b_n \neq a_{pp}$, donc f n'est pas surjective. Contradiction avec l'hypothèse f bijective.

Ainsi $[0;1]$ n'est pas dénombrable.

5. S'il existe une application bijective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ alors cette application est surjective sur $[0;1] \subset \mathbb{R}$ ce qui est impossible. Donc $\mathbb{R}$ est non dénombrable.

[1] Le développement (5) s'appelle *développement décimal propre*. Le développement (6) s'appelle *développement décimal impropre*. Tous les réels admettent un développement décimal propre, les réels admettant les deux développement décimaux s'appelent les nombres décimaux. On note $\mathbb{D}$ leur ensemble.

Exercice VI

L'idée est de reprendre l'exercice précédent et de remplacer 10 par 3.

1. Soit $u_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{3^n}$. Comme $a_n \leq 2$ on a

$$\begin{aligned} u_N &\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{3^n} \\ &\leq 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{3^n} \\ &\leq 2\frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^N}{1-\frac{1}{3}} \\ &\leq 1-\left(\frac{1}{3}\right)^N \\ &\leq 1 \end{aligned}$$

D'autre part $u_{N+1} - u_N = \frac{a_{N+1}}{3^{N+1}} \geq 0$ donc (u_n) est croissante et majorée, ainsi elle est convergente. Comme $0 \leq u_N \leq 1$ on a $0 \leq \lim_{N\to+\infty} u_N \leq 1$. Ainsi (u_N) converge vers un réel x de $[0;1]$.

2. Réciproquement soit $x \in [0;1]$. Si $x < 1$ il suffit de poser a_n égale au n-ième chiffre apparaissant dans le développement de x en base 3 que l'on construit par récurrence

$$\begin{cases} a_1 = E(3x) \\ a_i = E(3^i x - \sum_{j=1}^{i-1} a_j 3^{i-j}) \text{ pour } i \geq 2 \end{cases}$$

Si $x = 1$ on pose $a_n = 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ en effet

$$\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{3^n} = 1$$

3. Le développement décimale n'est pas nécessairement unique. Par exemple $\frac{1}{3} = \overline{0,1}^3$ peut également s'écrire $x = 0,0222\ldots$. Plus géneralement

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \ldots a_n 000\ldots} \tag{7}$$

avec $a_n \neq 0$ peut aussi s'écrire[2]

$$x = \overline{0, a_1 a_2 \ldots (a_n - 1)222\ldots} \tag{8}$$

En effet

$$\sum_{i=n}^{N} \frac{2}{3^i} = 2\sum_{i=n}^{N} \frac{1}{3^i} = 2\frac{1}{3^n}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N-n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{n-1}}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{N-n+1}\right)$$

donc $\lim_{N\to+\infty} \sum_{i=n}^{N} \frac{2}{3^i} = \frac{1}{3^{n-1}}$.

[2] Le développement (7) s'appelle *développement ternaire propre*. Le développement (8) s'appelle *développement ternaire impropre*.