Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S1 – Année 2005-2006
CS 103 – Analyse I — Promotion ESILV 2010

Correction des exercices de la Feuille 3

Exercice non corrigé en travaux dirigés

Exercice VIII

Notons
$$u_n = \frac{an^2 + bn + 1}{n^3}$$

- Si $a \neq 0$ alors $\lim \frac{u_n}{\frac{a}{n}} = 1$ donc
$$(u_n) \sim \frac{a}{n}$$
Si $a > 0$ alors ces suites sont positives à partir d'un certain rang, elles sont équivalentes et $a \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $s = 1 \leq 1$) donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge. Si $a < 0$ le raisonnement est analogue pour montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} -u_n$ diverge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.
- Si $a = 0$ alors
  - Si $b \neq 0$ alors $\lim \frac{u_n}{\frac{b}{n^2}} = 1$ donc
  $$(u_n) \sim \frac{b}{n^2}$$
  Si $b > 0$ alors ces suites sont positives à partir d'un certain rang, elles sont équivalentes et $b \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $s = 2 > 1$) donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge. Si $b < 0$ le raisonnement est analogue pour montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} -u_n$ converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.
  - Si $b = 0$ alors $u_n = \frac{1}{n^3}$, la série associée est de Riemann avec $s = 3 > 1$ donc convergente.

Conclusion : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si $a = 0$.