Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S5 – Année 2006-2007
ESI CS 2505 – Introduction à l'optimisation — Promotion ESILV 2009

Interrogation du 3/10/2006

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Vos réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto verso.

Exercice I (8 points)

Considérons la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x^3 + 6y^2 - 6xy \end{array}$$

1. Déterminer le ou les points critiques de f.

2. Quelle est la matrice hessienne de f en chaque point critique.

3. Démontrer que cette fonction admet un point-selle et un seul. La fonction admet-elle des extrema locaux ?

4. Déterminer les lignes séparatrices du point selle puis esquisser les courbes de niveaux au voisinage des points critiques.

Exercice II (4 points)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 et $g = f^2$.

1. Calculer ∇g en fonction de f et de ∇f.

2. Un point critique de f est-il nécessairement un point critique de g ? Faites une démonstration ou donnez un contre-exemple.

3. Un point critique de g est-il nécessairement un point critique de f ? Faites une démonstration ou donnez un contre-exemple.

Exercice III (8 points)

Soit $N \in \mathbb{N}$, f une fonction de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^2 admettant un minimum unique, un point critique unique, qui est coercive, c'est-à-dire qui vérifie

$$\lim_{\|X\| \to +\infty} f(X) = +\infty \tag{1}$$

et telle que ∇f est M-Lipchitzienne sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire que

$$\forall (X, X') \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N, \; \|\nabla f(X) - \nabla f(X')\| \leq M\|X - X'\| \tag{2}$$

où $\|\cdot\|$ reprśente la norme euclidienne de $\mathbb{R}^N$. On pose $\alpha = \frac{1}{M}$ et on considère la suite (U_n) d'éléments de $\mathbb{R}^N$ définie par une condition initiale U_0 donnée et la relation de récurrence

$$U_{n+1} = U_n - \alpha \nabla f(U_n)$$

Notons $v_n = f(U_n)$.

1. Démontrer que

$$f(U_{n+1}) = f(U_n) + \langle \nabla f(U_n), U_{n+1} - U_n \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)) - \nabla f(U_n), U_{n+1} - U_n \rangle \, dt$$

2. Démontrer que

$$v_{n+1} \leq v_n - M\|U_{n+1} - U_n\|^2 + \int_0^1 \|\nabla f(U_{n+1}) - \nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n))\| \|U_{n+1} - U_n\| dt$$

3. Démontrer que

$$v_{n+1} - v_n \leq -\frac{M}{2}\|U_{n+1} - U_n\|^2$$

4. Démontrer que que (v_n) converge.

5. Démontrer que (U_n) converge vers le minimum de f.