Examen du 15/11/2006

Corrigé

Exercice I

On a

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ x+y \end{pmatrix}$$

ainsi (x,y,z) est un point critique de f si et seulement si

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x-y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} y+z=0 \\ x-y=0 \\ 2x=0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $x=y=z=0$. La fonction f admet donc un point critique unique : $(0,0,0)$. D'autre part, on a

$$\mathrm{H}f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculons les valeurs propres de cette matrice. Le polynôme caractéristique est

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

en remplaçant la première colonne par la somme des trois colonnes, il vient

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2-\lambda & -\lambda & 1 \\ 2-\lambda & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda-1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-1-\lambda)^2$$

Les valeurs propres de $\mathrm{H}f(0,0,0)$ sont donc -1 (double) et 2. Comme les valeurs propres sont de signes contraires on en déduit que f n'admet pas d'éxtremum en $(0,0,0)$ et donc que f n'admet pas d'extremum.

Exercice II

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le gradient de f en (x, y) est donné par

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\alpha x \\ 2y \end{pmatrix}$$

ainsi, (x, y) est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} 2\alpha x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = 0 \text{ ou } \alpha = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Par suite, si $\alpha \neq 0$ alors il y a un seul point critique $(0, 0)$, sinon $\alpha = 0$ et il existe une infinité de points critiques $(x, 0)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

2. On a

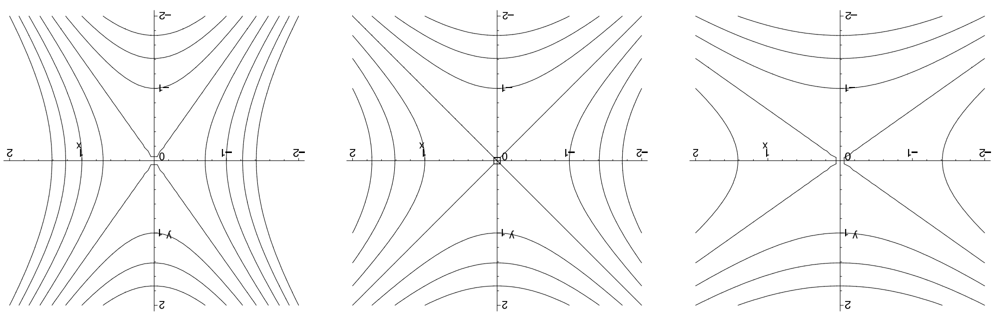
$$\mathrm{H}f(0,0) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi

- Lorsque $\alpha > 0$, les deux valeurs propres de $\mathrm{H}f(0, 0)$ sont strictement positives. Donc f admet un minimum en $(0, 0)$.
- Lorsque $\alpha < 0$, une valeur propre de $\mathrm{H}f(0, 0)$ est strictement positive et l'autre est strictement négative. Donc f admet un point-selle en $(0, 0)$.
- Lorsque $\alpha = 0$, une des valeur propre de $\mathrm{H}f(0, 0)$ est nulle. Donc conditions du second ordre ne permettent pas de conclure.

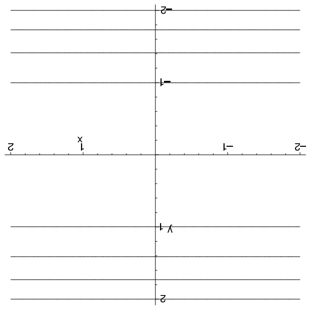
3. On a $f_0(x, y) = y^2 \geq 0 = f(x, 0)$ donc f admet un minimum en $(x, 0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

4. Si $\alpha < 0$ on a $f_\alpha = k$ équivalent à $-|\alpha|x^2 + y^2 = k$. Les lignes séparatrices de col sont obtenues pour $k = 0$, elles sont définies par $y = \sqrt{|\alpha|}x$ et $y = -\sqrt{|\alpha|}x$.

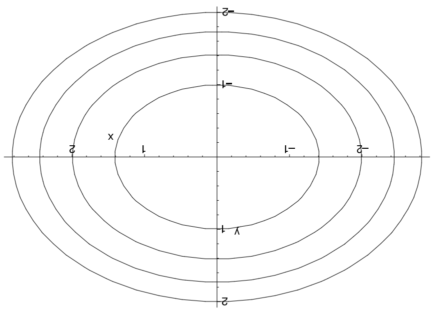


$\alpha < -1$ $\qquad$ $\alpha = -1$ $\qquad$ $-1 < \alpha < 0$

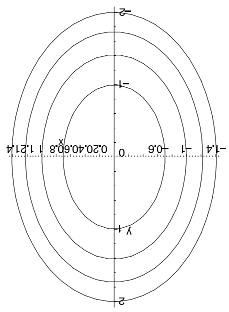
Si $\alpha = 0$ on a $f_0(x, y) = k$ équivalent à $y^2 = k$, ce qui impossible lorsque $k < 0$ et équivalent à $y = -\sqrt{k}$ ou $y = \sqrt{k}$ lorsque $k \geq 0$. Il s'agit donc d'un ensemble de droites horizontales.



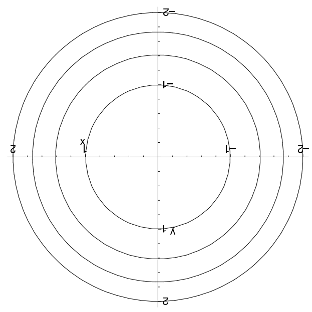
Si $\alpha > 0$ on a $f_\alpha = k$ équivalent à $\alpha x^2 + y^2 = k$ ce qui impossible lorsque $k < -$ et qui est léquation d'une ellipse lorsque $k \geq 0$.



$\alpha > 1$



$\alpha = 1$



$0 < \alpha < 1$

5. On a

$$\nabla g_\alpha(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \nabla f_\alpha(x,y) \\ \nabla f_{-\alpha}(x,y) \end{pmatrix}$$

ainsi (x,y,z,t) est un point critique de g_α si et seulement si (x,y) est un point critique de f_α et (z,t) est un point critique de $f_{-\alpha}$. Considérons donc deux cas

- Si $\alpha \neq 0$ alors (x,y,z,t) est un point critique de g_α si et seulement si $x = y = z = t = 0$. Dans ce cas
$$\mathrm{H}g_\alpha = \begin{pmatrix} \mathrm{H}f_\alpha & 0 \\ 0 & \mathrm{H}f_{-\alpha} \end{pmatrix}$$
a 4 valeurs propres strictement positives, donc g_α admet un minimum en $(0,0,0,0)$.
- Si $\alpha = 0$ alors (x,y,z,t) est un point critique de g_α si et seulement si $y = t = 0$. On a donc une infinité de points critiques $(x,0,z,0)$ avec $(x,z) \in \mathbb{R}^2$. Comme $g_\alpha(x,y,z,t) \geq 0 = g_\alpha(x,0,z,0)$, la fonction g_α réalise un minimum en $(x,0,z,0)$.

6. On a

$$\nabla g_\alpha(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} f_{-\alpha}(z,t)\nabla f_\alpha(x,y) \\ f_\alpha(x,y)\nabla f_{-\alpha}(x,y) \end{pmatrix}$$

ainsi (x,y,z,t) est un point critique de g_α si et seulement si

$$\begin{cases} (x,y) \text{ est un point critique de } f \text{ ou } f_{-\alpha}(z,t) = 0 \\ (z,t) \text{ est un point critique de } f \text{ ou } f_\alpha(z,y) = 0 \end{cases}$$

Comme on a supposé $\alpha \neq 0$, ce système équivaut à

$$\begin{cases} (x,y) = (0,0) \text{ ou } (z,t) = (0,0) \\ (x,y) = (0,0) \text{ ou } (z,t) = (0,0) \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(x,y) = (0,0)$ ou $(z,t) = (0,0)$ ainsi les points critiques sont $(0,0,a,b)$ et $(a,b,0,0)$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice III

Notons $f(x,y) = (x+y)^2$ et $h(x,y) = -xy$. Pour minimiser f sous la contrainte $h \leq 0$, considérons

$$\begin{array}{rcl} F \,:\, \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y)^2 + \lambda(-xy+\alpha^2) \end{array}$$

Le point (x,y,λ,α) est critique pour F si et seulement si

$$\begin{cases} 2(x+y) - \lambda x = 0 \\ 2(x+y) - \lambda y = 0 \\ -xy + \alpha^2 = 0 \\ \lambda\alpha = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2(x+y) - \lambda x = 0 \\ 2(x+y) - \lambda y = 0 \\ xy = 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2(x+y) = 0 \\ 2(x+y) = 0 \\ -xy + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ x = 0 \\ 2y = 0 \\ (2-\lambda)y = 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \alpha = 0 \\ y = 0 \\ 2x = 0 \\ (2-\lambda)x = 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = -x \\ x^2 + \alpha^2 = 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} \lambda = 0 \\ \alpha = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

ainsi $(0,0)$ est le seul point candidat à minimser $(x+y)^2$ sous la contrainte $xy \geq 0$. Réciproquement il satisfait bien le problème de minimisation puisque pour tout $f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}$ tel que $xy \geq 0$.

Exercice IV

1. L'ensemble des matrices symétriques réelles 2×2 s'écrit

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

Considérons alors la fonction objectif

$$\begin{array}{rcl} f \,:\, \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b,c) & \mapsto & \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = ac - b^2 \end{array}$$

et la contrainte $g = 1$ où

$$\begin{array}{rcl} g \,:\, \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (a,b,c) & \mapsto & \operatorname{tr} \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = a + c \end{array}$$

Explicitons cette contrainte : $g(a,b,c) = 1$ si et seulement $c = 1-a$. Considérons donc la fonction

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & f(a,b,1-a) \end{array}$$

On a $F(a,b,c) = a(1-a)-b^2$. Les maxima de F peuvent s'étudier en cherchant les points critiques et leur nature ou bien en remarquant que $F(a,b)$ atteint son maximum lorsque $a(1-a)$ et $-b^2$ atteignent leur maximum, c'est-à-dire lorsque $a = \frac{1}{2}$ et $b = 0$. La matrice cherchée est donc

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On notera que ce maximum est global.

2. On a

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right) = a^2 + 2b^2 + c^2$$

Le défaut d'inversibilité de

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

s'écrit $ac - b^2 = 0$ donc la contrainte peut être exprimée $b^2 = ac$. Le problème d'optimisation posé revient donc à minimiser

$$a^2 + 2ac + c^2$$

sous la contrainte

$$ac \geq 0$$

Or $a^2 + 2ac + c^2 = (a+c)^2$. En vertu de l'exercice III, le minimum cherché est atteint pour $a = c = 0$ ainsi $b = 0$ et la matrice cherchée est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On notera que l'on pouvait s'attendre à ce résultat : on a établit dans le devoir 2 que $\sqrt{f}$ esr une norme. La matrice nulle est bien non-inversible et minimise forcément la norme.