Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S5 – Année 2006-2007
ESI CS 2505 – Introduction à l'optimisation — Promotion ESILV 2009

Examen du 15/11/2006

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois premiers exercices sont indépendants. Vos réponses doivent être justifiées. Le barème est donné à titre indicatif. Ce sujet est recto verso.

Exercice I (4 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz$$

Déterminer le ou les points critiques de f et la nature de celui-ci ou de ceux-ci.

Exercice II (7 points)

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ on considère, la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f_\alpha(x, y) = \alpha x^2 + y^2$$

Dans les questions suivantes, on discutera selon α lorsque cela est opportun.

1. Déterminer le ou les points où f admet un point critique

2. Indiquer la nature des points critiques de f lorsque les conditions du second ordre permettent de conclure.

3. Quelle est la nature du ou des points critiques de f_0.

4. Esquisser les courbes de niveau de f dans tous les cas.

5. On considère g_α, la fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$g_\alpha(x, y, z, t) = f_\alpha(x, y) + f_{-\alpha}(z, t)$$

déduire de l'étude de f, le ou les points critiques de g_α et leur nature.

6. On considère h_α, la fonction définie sur $\mathbb{R}^4$ par

$$h_\alpha(x, y, z, t) = f_\alpha(x, y) \times f_{-\alpha}(z, t)$$

déduire de l'étude de f, le ou les points critiques de h_α lorsque $\alpha > 0$.

Exercice III (4 points)

Soit x et y deux réels. En utilisant la méthode des variables d'écart, déterminer le minimum de $(x+y)^2$ sous la contrainte $xy \geq 0$.

Exercice IV (5 points)

1. Considérons l'ensemble des matrices symétriques réelles 2×2 à coefficients dans $\mathbb{R}$. Determiner la ou les matrices dont le determinant est maximal et la trace est égale à 1.

2. Considérons l'opérateur de double contraction noté $\cdot\cdot$ et défini par

$$A \cdot \cdot B = A_{11}B_{11} + A_{12}B_{12} + A_{21}B_{21} + A_{22}B_{22}$$

où A et B sont deux matrices 2×2 et A_{ij} et B_{ij} représentent la composante (i, j) de A et de B respectivement. Notons f la fonction définie sur l'ensemble les matrices symétriques réelles 2×2 par

$$f(A) = A \cdot \cdot A$$

Déterminer le ou les minima de f sous la contrainte "A n'est pas inversible".