

Devoir 2

A rendre le 24/10/2006

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice symétrique réelle A non singulière $N \times N$ et $b \in \mathbb{R}^N$. Le but de ce devoir est d'utiliser l'algorithme du gradient exposé dans le devoir 1 pour résoudre le système

$$Ax = b$$

d'inconnu $x \in \mathbb{R}^N$.

Exercice I

On note f l'application définie de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R} par

$$f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|^2$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne.

1. Calculer ∇f et Hf .
2. Démontrer que f admet un minimum global et un point critique unique.
3. Montrer que f est coercive.
4. Montrer que ∇f est M -Lipchitzienne où M est exprimée en fonction d'une ou des valeurs propres de A .

Exercice II

Considérons l'opérateur de double contraction noté $\cdot \cdot$ et défini par

$$A \cdot \cdot B = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N A_{ij} B_{ij}$$

où A et B sont deux matrices $N \times N$ et A_{ij} et B_{ij} représentent la composante (i, j) de A et de B respectivement.

1. Montrer que la double contraction est un produit scalaire sur l'ensemble des matrices réelles $N \times N$.
2. On note $\|\cdot\|_F$ la norme associée à ce produit scalaire. Donner une expression de $\|A\|_F$ en fonction des composantes de la matrice A .
3. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à la norme euclidienne. Pour une matrice symétrique, montrer que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_F$.
4. En déduire une majoration du réel M par une quantité plus facile à calculer.

Exercice III

1. Réaliser un programme en C pour résoudre $Ax = b$ en utilisant l'algorithme du gradient. On prendra $U_0 = 0$ comme initialisation et $f(x) \leq 10^{-6}$ comme critère d'arrêt. On pourra supposer connue la dimension N de x avant la compilation du programme. Vous devez rendre le listing de votre programme.
2. Utiliser le programme que vous avez réalisé pour résoudre

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 9 \\ 16 \\ 25 \end{pmatrix}$$

Vous devez rendre l'impression des sorties de votre programme et préciser le nombre d'itération nécessaires.