Pôle Universitaire Léonard de Vinci
ESI CS 2505 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2006-2007
Promotion ESILV 2009

Devoir 1

corrigé

Exercice I

1. On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= (x+4y)^2 + 2x^2 + 76x + 2y^2 + 76y - 6 \\ &= (x+4y)^2 + (x+38)^2 + (y+38)^2 + x^2 + y^2 - 2894 \\ &\geq x^2 + y^2 - 2894 \end{aligned}$$

Lorsque $\|(x,y)\| \to +\infty$ on a $\|(x,y)\|^2 = x^2 + y^2 \to +\infty$ donc

$$\lim_{\|(x,y)\| \to +\infty} f(X) = +\infty$$

ce qui établit le résultat souhaité.

2. Soit $(X, X') \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$, notons $X = (x,y)$ et $X' = (x', y')$. On a

$$\nabla f(X) = \begin{pmatrix} 6x + 8y + 76 \\ 8x + 36y + 76 \end{pmatrix}$$

ainsi

$$\nabla f(X) - \nabla f(X') = \begin{pmatrix} 6(x-x') + 8(y-y') \\ 8(x-x') + 18(y-y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{pmatrix} (X - X')$$

Notons

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 36 \end{pmatrix}$$

on a alors

$$\|\nabla f(X) - \nabla f(X')\| \leq \|\!|A|\!\| \|X - X'\|$$

où $\|\cdot\|$ reprśente la norme euclidienne d'un vecteur et $\|\!|\cdot|\!\|$ reprśente la norme d'une matrice associée à la norme euclidienne. Celle-ci est définie par

$$\|\!|A|\!\| = \sqrt{\lambda_{max}({}^tAA)}$$

où $\lambda_{max}({}^tAA)$ est la plus grande valeur propre associée à la matrice ${}^tAA$. Ici, la matrice est symétrique donc

$$\sqrt{\lambda_{max}({}^tAA)} = \lambda_{max}(A)$$

Le polynôme caractéristique associé à A est $\lambda^2 - 42\lambda + 152$ dont les racines sont 4 et 38. Ainsi $\|\!|A|\!\| = 38$ et

$$\|\nabla f(X) - \nabla f(X')\| \leq 38\|X - X'\|$$

On a $M = 38$.

3. Le point $X \in \mathbb{R}^2$ est critique si et seulement si $\nabla f(X) = 0$ ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} 6x + 8y & = & -76 \\ 8x + 36y & = & -76 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & -14 \\ y & = & 1 \end{array} \right.$$

ainsi il y a un unique point candidat à réaliser un minimum de f, il s'agit de $(-14, 1)$ En outre, f admet bien un minimum en ce point puisque

$$\mathrm{H}\, f(-14, 1) = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 36 \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont strictement positives.

4. Nous programmons la fonction f et ses dérivées partielles. Pour simplifier l'écriture du programme on traite séparemment ces deux dérivées, un type vecteur de $\mathbb{R}^2$ pourrait permettre de les traiter simultanément. Nous choisissons $U_0 = (0, 0)$. Le critère d'arret est $\|\nabla f(U_n)\| \leq 10^{-6}$.

```
#include <stdio.h>

double f (double x, double y)
/* Fonction dont on cherche le minimum */
{
  return(3*x*x+8*x*y+18*y*y+76*x+76*y-6);
}

double fx (double x, double y)
/* Derivee de f par rapport a la premiere variable */
{
  return(6*x+8*y+76);
}

double fy (double x, double y)
/* Derivee de f par rapport a la deuxieme variable */
{
  return(8*x+36*y+76);
}

int main() {
  double epsilon=1e-6;
  double alpha=1/38.0;

  int n=0;
  double Ux=0, Uxold;
  double Uy=0;

  printf("U%d =\t(%13e,%13e)\n",n,Ux,Uy);

  /* le calcul d'une racine carree est plus couteux que le
     calcul d'un carre on compare donc plutot les carres */
  while(fx(Ux,Uy)*fx(Ux,Uy)+fy(Ux,Uy)*fy(Ux,Uy)>epsilon*epsilon) {
    n++;
    Uxold=Ux;
```

```
    Ux=Ux-alpha*fx(Ux,Uy);
    Uy=Uy-alpha*fy(Uxold,Uy);
    printf("U%d =\t(%13e,%13e)\n",n,Ux,Uy);
  }

  printf("\nResultat trouve apres %d iterations :\n",n);
  printf("La fonction admet un minimum en (%f,%f)\n",Ux,Uy);
  printf("La valeur de la fonction en ce point est %f\n",f(Ux,Uy));

  return 0;
}
```

L'exécution de ce programme donne

```
U0 = ( 0.000000e+00, 0.000000e+00)
U1 = (-2.000000e+00,-2.000000e+00)
U2 = (-3.263158e+00,-1.684211e+00)
U3 = (-4.393352e+00,-1.401662e+00)
U4 = (-5.404578e+00,-1.148856e+00)
U5 = (-6.309359e+00,-9.226602e-01)
U6 = (-7.118900e+00,-7.202749e-01)
U7 = (-7.843227e+00,-5.391933e-01)
U8 = (-8.491308e+00,-3.771730e-01)
U9 = (-9.071170e+00,-2.322074e-01)
U10 = (-9.589995e+00,-1.025014e-01)
U11 = (-1.005421e+01, 1.355140e-02)
U12 = (-1.046955e+01, 1.173881e-01)
U13 = (-1.084118e+01, 2.102946e-01)
U14 = (-1.117369e+01, 2.934215e-01)
U15 = (-1.147119e+01, 3.677982e-01)
U16 = (-1.173738e+01, 4.343457e-01)
U17 = (-1.197555e+01, 4.938883e-01)
U18 = (-1.218865e+01, 5.471632e-01)
U19 = (-1.237932e+01, 5.948302e-01)
U20 = (-1.254992e+01, 6.374797e-01)
U21 = (-1.270256e+01, 6.756397e-01)
U22 = (-1.283913e+01, 7.097829e-01)
U23 = (-1.296133e+01, 7.403321e-01)
U24 = (-1.307066e+01, 7.676655e-01)
U25 = (-1.316849e+01, 7.921218e-01)
U26 = (-1.325601e+01, 8.140037e-01)
U27 = (-1.333433e+01, 8.335823e-01)
U28 = (-1.340440e+01, 8.510999e-01)
U29 = (-1.346709e+01, 8.667736e-01)
U30 = (-1.352319e+01, 8.807974e-01)
U31 = (-1.357338e+01, 8.933451e-01)
U32 = (-1.361829e+01, 9.045719e-01)
U33 = (-1.365847e+01, 9.146170e-01)
U34 = (-1.369442e+01, 9.236047e-01)
U35 = (-1.372659e+01, 9.316463e-01)
U36 = (-1.375537e+01, 9.388414e-01)
U37 = (-1.378112e+01, 9.452792e-01)
U38 = (-1.380416e+01, 9.510392e-01)
U39 = (-1.382477e+01, 9.561930e-01)
```

```
U40 = (-1.384322e+01, 9.608043e-01)
U41 = (-1.385972e+01, 9.649301e-01)
U42 = (-1.387449e+01, 9.686217e-01)
U43 = (-1.388770e+01, 9.719247e-01)
U44 = (-1.389952e+01, 9.748800e-01)
U45 = (-1.391010e+01, 9.775242e-01)
U46 = (-1.391956e+01, 9.798901e-01)
U47 = (-1.392803e+01, 9.820069e-01)
U48 = (-1.393560e+01, 9.839009e-01)
U49 = (-1.394238e+01, 9.855956e-01)
U50 = (-1.394845e+01, 9.871118e-01)
U51 = (-1.395387e+01, 9.884685e-01)
U52 = (-1.395873e+01, 9.896823e-01)
U53 = (-1.396307e+01, 9.907684e-01)
U54 = (-1.396696e+01, 9.917401e-01)
U55 = (-1.397044e+01, 9.926096e-01)
U56 = (-1.397355e+01, 9.933875e-01)
U57 = (-1.397633e+01, 9.940836e-01)
U58 = (-1.397883e+01, 9.947064e-01)
U59 = (-1.398105e+01, 9.952636e-01)
U60 = (-1.398305e+01, 9.957622e-01)
U61 = (-1.398483e+01, 9.962082e-01)
U62 = (-1.398643e+01, 9.966074e-01)
U63 = (-1.398786e+01, 9.969645e-01)
U64 = (-1.398914e+01, 9.972840e-01)
U65 = (-1.399028e+01, 9.975699e-01)
U66 = (-1.399130e+01, 9.978257e-01)
U67 = (-1.399222e+01, 9.980546e-01)
U68 = (-1.399304e+01, 9.982594e-01)
U69 = (-1.399377e+01, 9.984426e-01)
U70 = (-1.399443e+01, 9.986065e-01)
U71 = (-1.399501e+01, 9.987532e-01)
U72 = (-1.399554e+01, 9.988845e-01)
U73 = (-1.399601e+01, 9.990019e-01)
U74 = (-1.399643e+01, 9.991069e-01)
U75 = (-1.399680e+01, 9.992009e-01)
U76 = (-1.399714e+01, 9.992851e-01)
U77 = (-1.399744e+01, 9.993603e-01)
U78 = (-1.399771e+01, 9.994277e-01)
U79 = (-1.399795e+01, 9.994879e-01)
U80 = (-1.399817e+01, 9.995418e-01)
U81 = (-1.399836e+01, 9.995900e-01)
U82 = (-1.399853e+01, 9.996332e-01)
U83 = (-1.399869e+01, 9.996718e-01)
U84 = (-1.399883e+01, 9.997063e-01)
U85 = (-1.399895e+01, 9.997373e-01)
U86 = (-1.399906e+01, 9.997649e-01)
U87 = (-1.399916e+01, 9.997897e-01)
U88 = (-1.399925e+01, 9.998118e-01)
U89 = (-1.399933e+01, 9.998316e-01)
U90 = (-1.399940e+01, 9.998493e-01)
U91 = (-1.399946e+01, 9.998652e-01)
U92 = (-1.399952e+01, 9.998794e-01)
U93 = (-1.399957e+01, 9.998921e-01)
```

```
U94 = (-1.399961e+01, 9.999034e-01)
U95 = (-1.399965e+01, 9.999136e-01)
U96 = (-1.399969e+01, 9.999227e-01)
U97 = (-1.399972e+01, 9.999308e-01)
U98 = (-1.399975e+01, 9.999381e-01)
U99 = (-1.399978e+01, 9.999446e-01)
U100 = (-1.399980e+01, 9.999505e-01)
U101 = (-1.399982e+01, 9.999557e-01)
U102 = (-1.399984e+01, 9.999603e-01)
U103 = (-1.399986e+01, 9.999645e-01)
U104 = (-1.399987e+01, 9.999683e-01)
U105 = (-1.399989e+01, 9.999716e-01)
U106 = (-1.399990e+01, 9.999746e-01)
U107 = (-1.399991e+01, 9.999773e-01)
U108 = (-1.399992e+01, 9.999797e-01)
U109 = (-1.399993e+01, 9.999818e-01)
U110 = (-1.399993e+01, 9.999837e-01)
U111 = (-1.399994e+01, 9.999854e-01)
U112 = (-1.399995e+01, 9.999870e-01)
U113 = (-1.399995e+01, 9.999883e-01)
U114 = (-1.399996e+01, 9.999896e-01)
U115 = (-1.399996e+01, 9.999907e-01)
U116 = (-1.399997e+01, 9.999916e-01)
U117 = (-1.399997e+01, 9.999925e-01)
U118 = (-1.399997e+01, 9.999933e-01)
U119 = (-1.399998e+01, 9.999940e-01)
U120 = (-1.399998e+01, 9.999946e-01)
U121 = (-1.399998e+01, 9.999952e-01)
U122 = (-1.399998e+01, 9.999957e-01)
U123 = (-1.399998e+01, 9.999962e-01)
U124 = (-1.399999e+01, 9.999966e-01)
U125 = (-1.399999e+01, 9.999969e-01)
U126 = (-1.399999e+01, 9.999973e-01)
U127 = (-1.399999e+01, 9.999975e-01)
U128 = (-1.399999e+01, 9.999978e-01)
U129 = (-1.399999e+01, 9.999980e-01)
U130 = (-1.399999e+01, 9.999982e-01)
U131 = (-1.399999e+01, 9.999984e-01)
U132 = (-1.399999e+01, 9.999986e-01)
U133 = (-1.399999e+01, 9.999987e-01)
U134 = (-1.400000e+01, 9.999989e-01)
U135 = (-1.400000e+01, 9.999990e-01)
U136 = (-1.400000e+01, 9.999991e-01)
U137 = (-1.400000e+01, 9.999992e-01)
U138 = (-1.400000e+01, 9.999993e-01)
U139 = (-1.400000e+01, 9.999994e-01)
U140 = (-1.400000e+01, 9.999994e-01)
U141 = (-1.400000e+01, 9.999995e-01)
U142 = (-1.400000e+01, 9.999995e-01)
U143 = (-1.400000e+01, 9.999996e-01)
U144 = (-1.400000e+01, 9.999996e-01)
U145 = (-1.400000e+01, 9.999997e-01)
U146 = (-1.400000e+01, 9.999997e-01)
U147 = (-1.400000e+01, 9.999997e-01)
```

```
U148 = (-1.400000e+01, 9.999998e-01)
U149 = (-1.400000e+01, 9.999998e-01)
U150 = (-1.400000e+01, 9.999998e-01)
U151 = (-1.400000e+01, 9.999998e-01)
U152 = (-1.400000e+01, 9.999998e-01)
U153 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)
U154 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)
U155 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)
U156 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)
U157 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)
U158 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)
U159 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)
U160 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)
U161 = (-1.400000e+01, 9.999999e-01)

Resultat trouve apres 161 iterations :
La fonction admet un minimum en (-14.000000,1.000000)
La valeur de la fonction en ce point est -500.000000
```

Exercice II

1. la fonction f est de classe C^2 (a *fortiori* de classe C^1) et ses dérivées partielles ne s'annulent pas simultanément en (a, b) puisque ce dernier n'est pas un point critique. Le théorème des fonctions implicites s'applique et donne

- Si $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \neq 0$, il existe une fonction ϕ de classe C^1 telle que $(x, y) \in V \cap \mathcal{C} \iff y = \phi(x)$.
- Si $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \neq 0$, il existe une fonction ψ de classe C^1 telle que $(x, y) \in V \cap \mathcal{C} \iff x = \psi(y)$.

Il est possible (et même fréquent) que $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \neq 0$ et $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \neq 0$, dans ce cas les deux assertions sont vraies simultanément.

2. Considérons les deux cas de la question 1

- Si $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \neq 0$, on a $y = \phi(x)$, considérons alors $F(x) = f(x, \phi(x))$. Cette fonction est dérivable comme composée de fonctions dérivables. L'équation $F(x) = f(a, b)$ est vraie lorsque x est dans un voisinage de a donc F est constante dans ce voisinage donc $F'(a) = 0$. ainsi

  $$0 = F'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, \phi(a)) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, \phi(a))\frac{\partial \phi}{\partial x}(a)$$

  en utilisant que $\phi(a) = b$, il vient

  $$\phi'(a) = \frac{\partial \phi}{\partial x}(a) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}$$

  La tangente à $\mathcal{C}$ en (a, b) a pour équation $y = \phi(a) + \phi'(a)(x - a)$ ce qui donne

  $$y = b - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}(x - a)$$

  d'où

  $$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)b + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)a\right) = 0$$

- Si $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} \neq 0$, un raisonnement analogue conduit à l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ en (a, b) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)b + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)a\right) = 0$$

3. Un vecteur normal de la droite d'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)x + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)y - \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)b + \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)a\right) = 0$$

est le gradient de f en (a, b) :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{pmatrix}$$

Notons $M = (a, b)$ et pour tout $\epsilon > 0$, $M_\epsilon = M + \epsilon \nabla f(M)$. Un développement limité permet d'écrire

$$\begin{aligned} f(M_\epsilon) &= f(M + \epsilon \nabla f(M)) \\ &= f(M) + \epsilon \langle \nabla f(M), \nabla f(M) \rangle + \mathrm{o}(\epsilon) \\ &= f(M) + \epsilon \|\nabla f(M)\|^2 + \mathrm{o}(\epsilon) \end{aligned}$$

Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $f(M_\epsilon) \geq f(M)$. Ainsi M_ϵ est sur une courbe de niveau d'altitude plus élevée que la courbe de niveau de M. En conclusion $\nabla f(a, b)$ indique le sens des courbes de niveau croissantes.

4. On initialise l'algorithme par un point quelconque U_0. On calcule le gradient en ce point, il est orthogonal à la courbe de niveau passant par U_0 et indique le sens des courbes de niveaux croissantes. Le vecteur $-\nabla f(U_0)$ est donc orthogonal à la courbe de niveau passant par U_0 et indique le sens de courbes de niveaux décroissantes. En “avancant” dans cette direction on fait donc décroitre f. Ainsi on remplace U_0 par $U_0 - \alpha \nabla f(U_0)$ où α est un réel positif petit (on prend $\alpha = \frac{1}{38}$). L'itération de ce processus conduit à un algorithme convergent vers le minimum.

Exercice III

1. Considérons φ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ par

$$\phi(t) = U_n + t(U_{n+1} - U_n)$$

Cette fonction affine est dérivable et sa dérivée est

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = U_{n+1} - U_n$$

Comme f est de classe C^2, la fonction $f \circ t$ est dérivable et sa dérivée est

$$\frac{d(f \circ \phi(t))}{dt} = \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt},\ {}^t Df \circ \phi(t) \right\rangle = \langle U_{n+1} - U_n, \nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)) \rangle$$

le produit scalaire étant symétrique, le résultat est établit.

2. On a
$$f(U_{n+1}) - f(U_n) = [f(U_n + t(U_{n+1} - U_n))]_{t=0}^{t=1}$$
donc
$$f(U_{n+1}) = f(U_n) + \int_0^1 \frac{d}{dt} f(U_n + t(U_{n+1} - U_n))dt$$
en vertu de la question précédente, il vient
$$f(U_{n+1}) = f(U_n) + \int_0^1 \langle \nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)), U_{n+1} - U_n \rangle \, dt$$
donc
$$f(U_{n+1}) = f(U_n) + \int_0^1 \langle \nabla f(U_n), U_{n+1} - U_n \rangle \, dt$$
$$+ \int_0^1 \langle \nabla f(U_n - t(U_{n+1} - U_n)) - \nabla f(U_n), U_{n+1} - U_n \rangle \, dt$$
d'où finalement
$$f(U_{n+1}) = f(U_n) + \langle \nabla f(U_n), U_{n+1} - U_n \rangle + \int_0^1 \langle \nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)) - \nabla f(U_n), U_{n+1} - U_n \rangle \, dt$$
ce qu'il fallait démonter.

3. Par construction de U_{n+1}, il vient
$$\nabla f(U_n) = -\frac{1}{\alpha}(U_{n+1} - U_n)$$
ainsi
$$\langle \nabla f(U_n), U_{n+1} - U_n \rangle = \left\langle -\frac{1}{\alpha}(U_{n+1} - U_n), U_{n+1} - U_n \right\rangle = -M\|U_{n+1} - U_n\|^2$$
d'autre part
$$\langle \nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)) - \nabla f(U_n), U_{n+1} - U_n \rangle \leq \|\nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)) - \nabla f(U_n)\| \|U_{n+1} - U_n\|$$
ainsi l'égalité établie dans la question précédente donne
$$f(U_{n+1}) \leq f(U_n) - M\|U_{n+1} - U_n\|^2 + \int_0^1 \|\nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)) - \nabla f(U_n)\| \|U_{n+1} - U_n\| dt$$
en replaçant $f(U_{n+1})$ par v_{n+1} et $f(U_n)$ par v_n, on obtient l'inégalité voulue.

4. Par hypothèses, ∇f est M-Lipchitzienne, ainsi
$$\|\nabla f(U_n) - \nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n))\| \leq M\|U_n - [U_n + t(U_{n+1} - U_n)]\|$$
donc
$$\|\nabla f(U_n) - \nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n))\| \leq tM\|U_{n+1} - U_n\|$$
ainsi
$$\int_0^1 \|\nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)) - \nabla f(U_n)\| \|U_{n+1} - U_n\| dt \leq \int_0^1 tM\|U_{n+1} - U_n\|^2 dt$$
or $\int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$ donc
$$\int_0^1 \|\nabla f(U_n + t(U_{n+1} - U_n)) - \nabla f(U_n)\| \|U_{n+1} - U_n\| dt \leq \frac{M}{2}\|U_{n+1} - U_n\|^2$$
Cette inégalité et celle de la question précédente conduisent à
$$v_{n+1} - v_n \leq -\frac{M}{2}\|U_{n+1} - U_n\|^2$$

5. Ainsi $v_{n+1} - v_n \leq 0$ donc la suite est décroissante. Par ailleurs elle est minorée puisque

$$v_n = f(U_n) \geq \min f$$

La suite (v_n) est donc convergente.

6. Comme $f(U_n)$ converge, toutes ses sous-suites convergent également ; ainsi, la coercivité de f impose que (U_n) ne puisse avoir de sous-suite dont la norme tend vers $+\infty$. Il en résulte que (U_n) est bornée.

7. En vertu du théorème de Bolzano-Weirstrass, la suite (U_n) étant bornée, elle admet au moins une valeur d'adhérence, elle admet donc au moins une sous-suite $(U_{\varphi(n)})$ convergente. Soit Z_0 sa limite. La fonction f étant de classe C^2, la fonction ∇f est continue, donc

$$\nabla f(Z_0) = \lim_{n \to +\infty} \nabla f(U_{\varphi(n)})$$

La définition de (U_n) donne alors

$$\nabla f(Z_0) = \lim_{n \to +\infty} \frac{U_{\varphi(n)} - U_{\varphi(n+1)}}{\alpha} = 0$$

La fonction f admet un minimum en $Z_0 = Z$ puisque le point critique est unique.

Toutes les sous-suites de (U_n) convergent donc vers Z, en conséquences (U_n) converge vers le point où f réalise son minimum.

8. On considère un suite U_n définie par un premier terme U_0 donné et la relation de récurrence.

$$U_{n+1} = U_n - \frac{1}{M} \nabla f(U_n)$$

sous les conditions exprimées sur f, cette suite converve vers le minimum de f. D'un point de vue pratique, on calcule U_n pour une grande valeur de n. On considérera que n est assez grand lorsque $\nabla f(U_n)$ a une norme suffisament petite. Cela conduit à l'algorithme suivant :

```
Variables considerees : n (entier) et U (vecteur de dimension 2)

n <- 0
U <- (0,0)

Repeter tant que |Grad f(U)| > valeur seuil
|  n <- n+1
|  U <- U - (1/M) * Grad f(U)

Afficher U
```

Remarquons que cette méthode est généralisable sans difficulté au cas de fonctions à valeur dans $\mathbb{R}^N$ avec $N \geq 3$.