Pôle Universitaire Léonard de Vinci
 S2 – Année 2004-2005
CS 103 – Analyse I
 Promotion ESILV 2009

Devoir 4

A rendre le 04/04/2005

Exercice I

Soit $m \in \mathbb{N}$, on note

$$A_m = \left\{ \frac{mn}{m+n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Montrer que $A_m \subset [0, m]$.

2. L'ensemble A_0 est-il un ouvert ? Est-il un fermé ?

3. Reprśenter graphiquement A_m lorsque $m = 1$, $m = 2$ et $m = 5$.

4. L'ensemble A_m est-il fermé lorsque $m \neq 0$

5. A-t'on $m \in A'_m$ lorsque $m \neq 0$?

Exercice II

Considérons

$$E = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m$$

1. Montrer que $\mathbb{N}^* \subset E'$

2. Montrer que $E' \subset [0, +\infty[$

3. Soit $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Notons $d = \frac{1}{2} \min\{x - \mathrm{E}(x), \mathrm{E}(x) + 1 - x, x\}$

a. Montrer que si $m \leq \mathrm{E}(x)$ alors $A_m \cap]x - d, x + d[= \emptyset$.

b. Montrer que si $m \geq \mathrm{E}(x) + 1$ alors $A_m \cap]x - d, x + d[$ est fini.

c. Montrer qu'il existe un entier M tel que $m > M$ entraine

$$\left] \frac{(x-d)m}{m-(x-d)}, \frac{(x+d)m}{m-(x+d)} \right[\cap \mathbb{N} = \emptyset$$

4. En déduire que $E' = \mathbb{N}^*$.

Exercice III

1. L'ensemble E est-il ouvert ?

2. Montrer que $\mathbb{N} \subset E$.

3. Quelle est l'adhérence de E ? L'ensemble E est-il fermé ?