

Devoir 3

A rendre le 04/03/2005

Exercice I

Soit $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{R}^4$ et $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ l'ensemble des suites (u_n) satisfaisant

$$\alpha u_{n+2} + \beta u_{n+1} + \gamma u_n + \delta = 0 \quad (1)$$

1. Montrer que $E_{\alpha, \beta, \gamma, 0}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Lorsque $\delta \neq 0$, l'ensemble $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$ est-il un espace vectoriel sur \mathbb{R} ?

Exercice II

Dans cet exercice on suppose $\alpha = 0$.

1. Expliciter $E_{0, \beta, \gamma, 0}$ en donnant le terme général des suites qui le composent lorsque cela est pertinent. Discuter selon β et γ le cas échéant.
2. Si $\delta \neq 0$, expliciter $E_{0, \beta, \gamma, \delta}$ en donnant le terme général des suites qui le composent lorsque cela est pertinent. On pourra, dans certains cas introduire une suite géométrique (v_n) telle que $v_n = u_n + a$ où a est un réel et $(u_n) \in E_{0, \beta, \gamma, \delta}$.

Exercice III

Dans cet exercice on suppose $\alpha \neq 0$ et $\delta = 0$. Déterminer le terme général de (u_n) satisfaisant (1).

Exercice IV

Dans cet exercice on suppose $\alpha \neq 0$ et $\delta \neq 0$.

1. Dans cette question on suppose $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$
 - a. Montrer qu'il existe une suite constante satisfaisant (1).
 - b. En déduire le terme général des suites appartenant à $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$.
2. Dans cette question on suppose $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $2\alpha + \beta \neq 0$
 - a. Montrer qu'il existe une suite arithmétique satisfaisant (1).
 - b. En déduire le terme général des suites appartenant à $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$.
3. Dans cette question on suppose $\alpha + \beta + \gamma = 0$ et $2\alpha + \beta = 0$
 - a. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $u_n = \lambda n^2$ satisfait (1).
 - b. En déduire le terme général des suites appartenant à $E_{\alpha, \beta, \gamma, \delta}$.