Devoir 2

A rendre le 24/01/2005

Exercice I

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$$

et ψ la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$\psi(x) = \ln(1+x) + \frac{1}{1+x} - 1$$

1. Montrer que pour tout $x \in]0,1]$ on a $0 \leq \psi(x) \leq \frac{1}{2}x^2$.

2. Montrer que

$$0 \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2}$$

3. Quelle est la nature de la série suivante ?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n - u_{n+1})$$

4. Montrer que (u_n) converge. On notera $\gamma = \lim u_n$.

Exercice II

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et φ_k la fonction définie par

$$\begin{array}{rcl} \varphi_k \ : \ [k, k+1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{k} + \left(\dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k} \right)(x-k) - \dfrac{1}{x} \end{array}$$

Montrer que $\varphi_k \geq 0$.

2. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} \right)$$

3. En déduire que $\gamma \in [\frac{1}{2}, 1]$

Exercice III

1. Montrer que

$$\frac{1}{2n^2} - \frac{2}{3n^3} \leq u_n - u_{n+1} \leq \frac{1}{2n^2}$$

2. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{n} \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n-1}$$

3. Donner une majoration de

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^3}$$

4. Montrer que pour $n \geq 2$ on a

$$\frac{1}{2n} - \frac{1}{3(n-1)^2} \leq u_n - \gamma \leq \frac{1}{2(n-1)}$$

5. Au moyen des outils enseignés en GI 101, donnez une approximation de γ à 10^{-4} près.