Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2004-2005
Promotion ESILV 2009

Devoir 1

A rendre le 6/12/2004

Exercice I

Soit (u_n) une suite convergente.

1. Notons $l \in \mathbb{R}$ la limite de (u_n). En utilisant la définition de la limite, montrer qu'à partir d'un certain rang, les termes de (u_n) sont majorés par $l+1$ et minorés par $l-1$.

2. En déduire que (u_n) est bornée.

Exercice II

Soit (u_n) et (v_n) deux suites convergentes. Notons $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$ leurs limites respectives.

1. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |l'|\,|u_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

2. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |u_n|\,|v_n - l'| < \frac{\varepsilon}{2}$$

3. En utilisant la définition de la limite, démontrer que $\lim(u_n v_n) = ll'$.

Exercice III

Soit (u_n) et (v_n) deux suites de Cauchy. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n v_n$. En utilisant la définition des suites de Cauchy, montrer que (w_n) est également une suite de Cauchy. Dans cet exercice, on n'utilisera pas le théorème affirmant qu'une suite de Cauchy réelle est convergente dans $\mathbb{R}$.