

Feuille d'exercices 2

Suites numériques

Exercice I

Considérons les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définies par

$$\begin{aligned}u_n &= \frac{n! e^n}{n^n \sqrt{n}} \\v_n &= \ln u_n \\w_n &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

et la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{x - \frac{1}{2}} + \ln(x - 1) - \ln x$$

Dans cet exercice on montrera la formule de Stirling-De Moivre¹

$$n! \sim C \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$$

on montrera que $C > \exp \frac{4}{5}$, ce réel est en fait $\sqrt{2\pi}$ mais on ne le démontrera pas ici.

1. Montrer que $v_n - v_{n-1} = (n - \frac{1}{2})f(n)$.
2. Etudier les variations des suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Montrer qu'il existe un réel positif C tel que $\lim u_n = C$.
4. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a

$$\frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{1}{x^2} dx$$

en déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a

$$w_n \leq \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$$

et interpréter graphiquement ces deux inégalités.

¹Abraham de Moivre, mathématicien Français puis Anglais, du XVIIIe siècle, fut à l'origine de la géométrie analytique et de la théorie des probabilités. Dans *Miscellanea Analytica* paru en 1730 apparaît la formule qui va être démontrée dans cet exercice (par une autre méthode). Elle fut, à tort, attribuée à James Stirling et elle est souvent connue sous le nom de "Formule de Stirling". Abraham de Moivre est également connu pour la formule $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.



Abraham de Moivre (1667-1754)

5. Montrer que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers un réel inférieur à 1.

6. Montrer que

$$\forall x \in [2, +\infty[, f(x) \geq -\frac{1}{5x^2(x - \frac{1}{2})}$$

7. Montrer que pour tout entier $k \geq 2$ on a $v_k - v_{k-1} \geq -\frac{1}{5k^2}$.

8. En déduire que pour tout entier $n \geq 2$ on a $v_n \geq -\frac{1}{5}w_n + 1$.

9. En déduire que $C \geq e^{\frac{4}{5}}$

10. En déduire un équivalent de $n!$ en $+\infty$.

Exercice II

Dans les cas suivants, dire si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, et si $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Le cas échéant, précisez quelle est l'application φ utilisée.

1. $u_n = 4n, v_n = n$

2. $u_n = n, v_n = n^2$

3. $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, v_n = \frac{2n+1}{2n}$

4. $u_n = 4^n, v_n = (-1)^n$

5. $u_n = e^n, v_n = 2^n$

6. $u_n = n^2, v_n = 2n^2 + 1$

7. $u_n = n^p, v_n = n^q$, où p et q sont des entiers naturels. Discuter selon p et q le cas échéant.

Exercice III

Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$. Considérons $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Determiner le terme général de la suite (u_n) en fonction de u_0, a et b .

Exercice IV

Soit $s \in \mathbb{N}^*$ un entier et

$$A_s = \left\{ \frac{1}{n}, n \in \llbracket 1, s \rrbracket \right\}$$

Montrer qu'une suite convergente d'éléments de A_4 est constante à partir d'un certain rang. Ce résultat peut-il être généralisé à A_s pour $s \in \mathbb{N}^*$ quelconque ?

Exercice V

La suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ admet-elle des sous-suites convergentes ?