Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2008

Interrogation du 3/10/2005

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les trois exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Vos réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto verso. Il doit être rendu avec votre copie et être compté comme une feuille intercalaire.

Exercice I (9 points)

Considérons la fonction f définie par

$$\begin{array}{rccl} f \ : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2+y^3+xy-2x-y+1 \end{array}$$

1. Déterminer le ou les points critiques de f

2. Quelle est la matrice hessienne de f en chaque point critique.

3. En déduire la nature de chaque point critique.

4. Esquisser les courbes de niveau au voisinage du point $(1;0)$.

5. La fonction f admet-elle un minimum global ? Un maximum global ?

Exercice II (6 points)

Construire une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^2 qui a les propriétès suivantes.

i) La fonction f admet un minimum local en $(-1;0)$.

ii) La fonction f admet un point-selle en $(0;1)$.

iii) La fonction f n'admet pas d'autres points critiques.

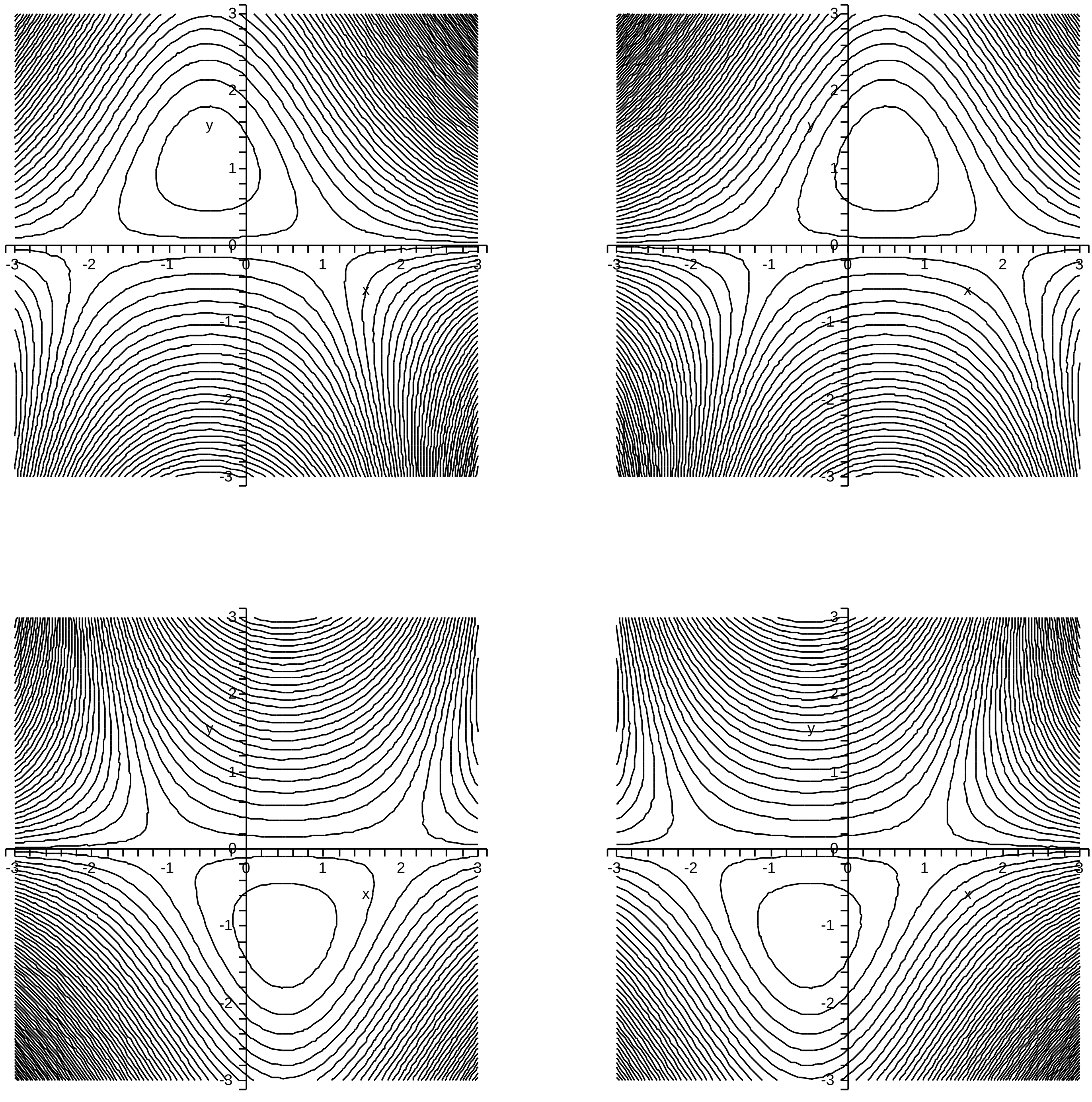
On ne demande pas de justifier la construction de f, en revanche vous devez démontrer que la fonction f que vous proposez satisfait (i), (ii) et (iii).

Exercice III (5 points)

Considérons f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y)=2+x^2y-2y-xy+y^2$. Les courbes de niveau de f sont représentées sur l'un des graphes au dos de ce sujet.

1. Identifiez le graphe qui correspond aux courbes de niveau de f, indiquez votre choix sur ce sujet et justifier ce choix sur votre copie.

2. Sur le graphe choisi, indiquez le sens et la direction du vecteur en un point de votre choix.


y
x
-3 -2 -1 0 1 2 3