

## Examen du 14/11/2005

*Durée de l'épreuve : 2 heures*

**L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Tous les exercices sont indépendants. Vos réponses doivent être justifiées. Le barème est donné à titre indicatif.**

### Exercice I (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^3$  par

$$f(x, y, z) = \exp(x^2 + 2y^2 + 3z^2) + \ln(x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 1) + (x^2 + 2y^2 + 3z^2)^4 + x^2 + 2y^2 + 3z^2$$

1. Déterminer le ou les points où  $f$  admet un extremum local.
2. La fonction  $f$  admet-elle un minimum global ? Un maximum global ?

### Exercice II (7 points)

1. Considérons la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[^2$  par  $f(x, y) = (1 + x)(1 + y)$  et la contrainte  $xy = 4$ . Déterminer le seul extrema possible de  $f$  sous cette contrainte.

2. Soit  $n \geq 2$  un entier. Considérons la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[^n$  par

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n (1 + x_i) = (1 + x_1) \dots (1 + x_n)$$

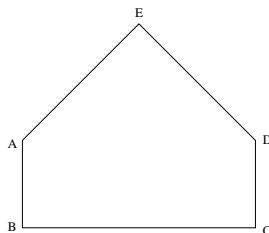
et la contrainte

$$\prod_{i=1}^n x_i = 2^n$$

Déterminer le seul extrema possible de  $f$  sous cette contrainte.

### Exercice III (7 points)

Considérons le pentagone  $(ABCDE)$  constitué par un rectangle  $(ABCD)$  non plat et un triangle  $(ADE)$  isocèle rectangle comme dessiné sur la figure ci-dessous.



On suppose que les unités sont en centimètre. Déterminer les longueurs des cotés afin que l'aire de  $(ABCDE)$  soit maximale et son périmètre soit inférieur ou égal à  $2 + 4\sqrt{2}$  cm. On ne demande pas de vérifier les conditions secondes.