

Devoir 2

Corrigé

Exercice I

1. La fusée a une vitesse nulle lors du lancement, donc en vertu de (1), la vitesse de la fusée au moment où le premier étage est éjecté est

$$-c \ln \left(1 - \frac{(1-S)M_1}{M_1 + M_2 + M_3 + P} \right)$$

En effet, le système peut être assimilé à une fusée à un étage dont le chargement est l’étage 2, l’étage 3 et ce que l’on souhaite envoyer grâce à la fusée. Par suite la vitesse est égale à

$$-c \ln \left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + P - M_1 + SM_1}{M_1 + M_2 + M_3 + P} \right)$$

c’est-à-dire

$$c \ln \left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + P}{SM_1 + M_2 + M_3 + P} \right)$$

De manière analogue, la différence de vitesse de la fusée entre le moment où le premier étage est éjecté et le moment où le deuxième étage est éjecté est

$$-c \ln \left(1 - \frac{(1-S)M_2}{M_2 + M_3 + P} \right)$$

ce qui est égal à

$$c \ln \left(\frac{M_2 + M_3 + P}{SM_2 + M_3 + P} \right)$$

La vitesse de la fusée au moment de la séparation du deuxième étage est donc

$$c \ln \left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + P}{SM_1 + M_2 + M_3 + P} \right) + c \ln \left(\frac{M_2 + M_3 + P}{SM_2 + M_3 + P} \right)$$

La fusée est alors constituée d’un seul étage (le troisième), la différence de vitesse donnée par (1) est égal à

$$c \ln \left(\frac{M_3 + P}{SM_3 + P} \right)$$

Par suite

$$V_d = c \left[\ln \left(\frac{M_1 + M_2 + M_3 + P}{SM_1 + M_2 + M_3 + P} \right) + \ln \left(\frac{M_2 + M_3 + P}{SM_2 + M_3 + P} \right) + \ln \left(\frac{M_3 + P}{SM_3 + P} \right) \right]$$

2. Un calcul direct donne

$$\frac{(1-S)^3 N_1 N_2 N_3}{(1-SN_1)(1-SN_2)(1-SN_3)} = \frac{(1-S)^3 \frac{M_1+M_2+M_3+P}{SM_1+M_2+M_3+P} \frac{M_2+M_3+P}{SM_2+M_3+P} \frac{M_3+P}{SM_3+P}}{\left(1-S \frac{M_1+M_2+M_3+P}{SM_1+M_2+M_3+P}\right) \left(1-S \frac{M_2+M_3+P}{SM_2+M_3+P}\right) \left(1-S \frac{M_3+P}{SM_3+P}\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1-S)^3(M_1 + M_2 + M_3 + P)(M_2 + M_3 + P)(M_3 + P)}{(SM_1 + M_2 + M_3 + P)(SM_2 + M_3 + P)(SM_3 + P) \frac{(1-S)(M_2+M_3+P)}{SM_1+M_2+M_3+P} \frac{(1-S)(M_3+P)}{SM_2+M_3+P} \frac{(1-S)P}{SM_3+P}} \\
&= \frac{M_1 + M_2 + M_3 + P}{P}
\end{aligned}$$

ce qui établit le résultat attendu.

Exercice II

1. Commençons par remarquer¹ que $u \mapsto \ln u$ est une fonction strictement croissante de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} , en conséquence trouver le point où f_S est minimale, sous la contrainte, est équivalent à trouver le point où $\ln f_S$ est minimal sous cette même contrainte. Considérons² alors la fonction

$$\begin{aligned}
L :]0, +\infty[^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
(x, y, z, t) &\mapsto \ln f_S(x, y, z) + t(\ln x + \ln y + \ln z - \lambda)
\end{aligned}$$

On a $L(x, y, z, t) = 3 \ln(1-S) + \ln x + \ln y + \ln z - \ln(1-Sx) - \ln(1-Sy) - \ln(1-Sz) + t(\ln x + \ln y + \ln z - \lambda)$, ainsi

$$\nabla L(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \frac{1+t}{x} + \frac{S}{1-Sx} \\ \frac{1+t}{y} + \frac{S}{1-Sy} \\ \frac{1+t}{z} + \frac{S}{1-Sz} \\ \ln x + \ln y + \ln z - \lambda \end{pmatrix}$$

ainsi, (x, y, z, t) est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} (1+t)(1-Sx) + Sx = 0 \\ (1+t)(1-Sy) + Sy = 0 \\ (1+t)(1-Sz) + Sz = 0 \\ \ln x + \ln y + \ln z - \lambda = 0 \end{cases}$$

Comme $t = 0$ est impossible, ce système équivaut à

$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{St} \\ y = z = x \\ 3 \ln x = \lambda \end{cases}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x = y = z = \exp(\lambda/3) \\ t = \frac{1}{S \exp(\lambda/3) - 1} \end{cases}$$

Le seul point critique de L est donc $(\exp(\lambda/3), \exp(\lambda/3), \exp(\lambda/3))$. En outre,

$$L_{XX}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} -\frac{1+t}{x^2} + \frac{S^2}{(1-Sx)^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+t}{y^2} + \frac{S^2}{(1-Sy)^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1+t}{z^2} + \frac{S^2}{(1-Sz)^2} \end{pmatrix}$$

si bien que

$$L_{XX} \left(\exp(\lambda/3), \exp(\lambda/3), \exp(\lambda/3), \frac{1}{S \exp(\lambda/3) - 1} \right) = \frac{\exp(-\lambda/3)S}{(\exp(\lambda/3)S - 1)^2} I$$

qui est définie positive. Ainsi $(\exp(\lambda/3), \exp(\lambda/3), \exp(\lambda/3))$ est le point où f_S admet son minimum sous la contrainte $\ln x + \ln y + \ln z = \lambda$.

¹Sans cette remarque, les calculs peuvent être menés mais ils ont plus compliqués, voire extrêmement plus compliqué pour L_{XX} .

²La variable λ étant déjà utilisée, il convient de choisir un autre symbole pour le coefficient de Lagrange. Nous choisissons t .

Exercice III

1. En vertu de la question 1 de l'exercice I, la contrainte "la fusée atteint la vitesse V_d " peut être reformulée

$$\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3 = \frac{V_d}{c} \quad (3)$$

En vertu de (2) on a

$$\frac{M_1 + M_2 + M_3 + P}{P} = f_S(N_1, N_2, N_3)$$

La fonction $u \mapsto u/P$ étant strictement croissante, trouver M_1 , M_2 et M_3 qui minimisent $M_1 + M_2 + M_3 + P$ sous la contrainte (3), revient à trouver M_1 , M_2 et M_3 qui minimisent $(M_1 + M_2 + M_3 + P)/P$ sous cette même contrainte, c'est-à-dire trouver M_1 , M_2 et M_3 qui minimisent f_S sous (3).

Posons $\lambda = V_d/c$, le problème est réduit à trouver les minima de f_S sous la contrainte $\ln N_1 + \ln N_2 + \ln N_3 = \lambda$.

Etant donné que M_1 , M_2 , M_3 , P et S sont strictement positives, on a N_1 , N_2 et N_3 strictement positifs. En outre

$$\begin{aligned} 1 - SN_3 &= \frac{(1-S)P}{SM_3 + P} > 0 \\ 1 - SN_2 &= \frac{(1-S)(P + M_2)}{SM_2 + M_3 + P} > 0 \\ 1 - SN_1 &= \frac{(1-S)(P + M_2 + M_1)}{SM_1 + M_2 + M_3 + P} > 0 \end{aligned}$$

donc l'exercice II s'applique et donne que le minimum cherché est obtenu pour

$$N_1 = N_2 = N_3 = \exp(V_d/(3c))$$

ainsi, on obtient le système triangulaire suivant :

$$\begin{cases} (Se^{\frac{V_d}{3c}} - 1)M_1 + (e^{\frac{V_d}{3c}} - 1)M_2 + (e^{\frac{V_d}{3c}} - 1)M_3 = (1 - e^{\frac{V_d}{3c}})P \\ (Se^{\frac{V_d}{3c}} - 1)M_2 + (e^{\frac{V_d}{3c}} - 1)M_3 = (1 - e^{\frac{V_d}{3c}})P \\ (Se^{\frac{V_d}{3c}} - 1)M_3 = (1 - e^{\frac{V_d}{3c}})P \end{cases} \quad (4)$$

ce qui détermine M_1 , M_2 et M_3 .

2. En résolvant le système (4) avec les paramètres $V_d = 11000$, $S = 0.2$, $c = 2600$ et $P = 250$, il vient

$$\begin{aligned} M_1 &= 1412 \text{ T} \\ M_2 &= 77.8 \text{ T} \\ M_3 &= 4.3 \text{ T} \end{aligned}$$

Remarquons que le premier étage est effectivement le plus gros.