Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 202 – Introduction à l'optimisation

S5 – Année 2005-2006
Promotion ESILV 2008

Devoir 1

Corrigé

Exercice I

1. Le point (x, y) appartient à $\mathcal{C}_2$ est équivalent à $f(x, y) = 2$, ainsi une équation cartésienne de $\mathcal{C}_2$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$-x^3 + 3x + y^2 - 2 = 0 \tag{1}$$

C'est-à-dire qu'un point M de coordonnées (x, y) dans $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ appartient à $\mathcal{C}_2$ si et seulement si $-x^3 + 3x + y^2 - 2 = 0$.

Notons (X, Y) les coordonnées de ce même point M dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Compte tenu de $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$, on a

$$\begin{cases} X &= -1 + x \\ Y &= y \end{cases}$$

ainsi (1) est logiquement équivalente à chacune des trois lignes suivantes

$$\begin{aligned} -(X+1)^3 + 3(X+1) + Y^2 - 2 &= 0 \\ -X^3 - 3X^2 - 3X - 1 + 3X + 3 + Y^2 - 2 &= 0 \\ -X^3 - 3X^2 + Y^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

cette dernière équation (2) est une équation cartésienne de $\mathcal{C}_2$ dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

2. En conservant les notations de la question précédente $M \in \mathcal{C}_2$ si et seulement si

$$Y^2 = X^2(X + 3)$$

c'est-à-dire $y^2 = (x-1)^2(x+2)$, ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x \in [-2, +\infty[\\ y = (x-1)\sqrt{x+2} \quad \text{ou} \quad y = -(x-1)\sqrt{x+2} \end{cases} \tag{3}$$

Soit g la fonction définie de $[-2, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, par $g(x) = (x-1)\sqrt{x+2}$. Le système (3) équivaut à

$$\begin{cases} x \in [-2, +\infty[\\ y = g(x) \quad \text{ou} \quad y = -g(x) \end{cases} \tag{4}$$

En notant $\mathcal{C}_2^+$ la courbe représentative de g et $\mathcal{C}_2^-$ la courbe représentative de $-g$, le système (4) équivaut à

$$(x, y) \in \mathcal{C}_2^+ \quad \text{ou} \quad (x, y) \in \mathcal{C}_2^-$$

c'est-à-dire $(x, y) \in C_2^+ \cup C_2^-$.

Nous avons établi $M \in \mathcal{C}_2 \iff M \in \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_2^-$, ce qui est équivalent à $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_2^-$.

3. La fonction g est dérivable sur $]-2,+\infty[$ comme produit de fonction dérivables. On a

$$g'(x) = \sqrt{x+2} + \frac{(x-1)}{2\sqrt{x+2}} = \frac{3}{2\sqrt{x+2}}(x+1)$$

qui est négatif sur $]-2,-1]$ et positif sur $[-1,+\infty[$. Notons que g admet une tangente verticale en -2 et que la limite de $g(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ est $+\infty$. On obtient le tableau suivant

x	-2		-1		$+\infty$
signe de $g'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
variations de g	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe $\mathcal{C}_2^+$, représentative de g, est représentée figure 1.

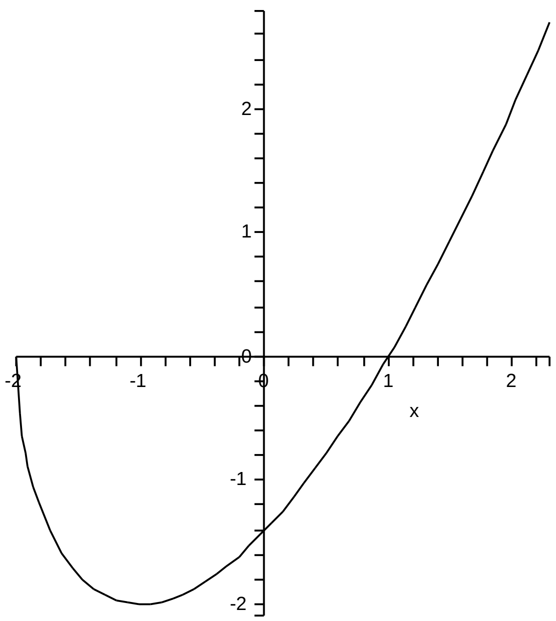

Figure 1: Courbe $\mathcal{C}_2^+$

La courbe $\mathcal{C}_2^-$, représentative de $-g$, est s'obtient par symétrie orthogonale d'axe (xx'). La courbe $\mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_2^+ \cup \mathcal{C}_2^-$ est représentée figure 2.

Il convient de remarquer que d'autres choix de g sont possibles, par exemple $g(x) = |x-1|\sqrt{x+2}$. Toutefois ce dernier choix complique notablement la rédaction de la question suivante car il introduit la nécessité d'étudier des demi-tangentes et de vérifier leur recollement.

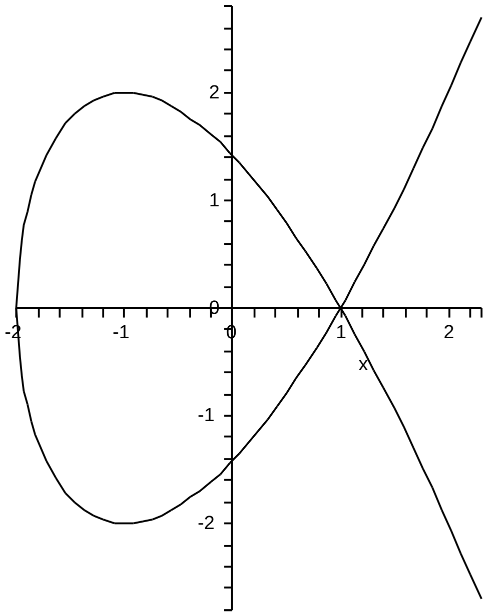

Figure 2: Courbe $\mathcal{C}_2$

4. La fonction g est dérivable en 1, l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_2^+$ au point d'abscisse 1 est

$$y = g'(1)(x-1) + g(1)$$

c'est-à-dire

$$y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

par symétrie, la tangente à $\mathcal{C}_2^-$ au point d'absisse 1 est

$$y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$$

La formule de Taylor indique que l'erreur commise en remplaçant $g(x)$ par $\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ au voisinage de $x = 1$ est de l'ordre de $\frac{1}{2}g''(1)(x-1)^2$ ainsi, lorsque $(x, y) \in B_\infty(A, 2.10^{-1})$ cette erreur est de l'ordre de 10^{-2}. Sur le graphe il est impossible de distinguer $\mathcal{C}_2$ de la reunion des deux tangentes. On obtient la figure 3.

Exercice II

1. Soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = x^3 - 3x$$

cette fonction est polynomiale, elle est dérivable et son étude ne pose pas de problème particulier. Sa dérivée est

$$\varphi'(x) = 3x^2 - 3$$

et le tableau de variation est le suivant

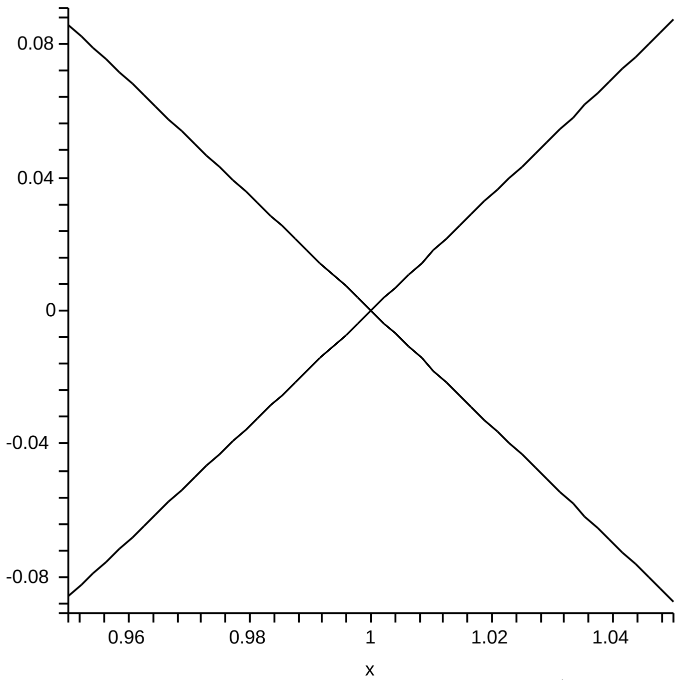

Figure 3: Courbe $\mathcal{C}_2 \cap B_\infty(A, 10^{-1})$

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
signe de $\varphi'(x)$			$+$		0	$-$	0		$+$		
variations de φ	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Lorsque $k > 2$ (respectivement $k < -2$) l'équation $\varphi(x) = -k$ admet une solution unique $\alpha_k < -2$ (respectivement $\alpha_k > -2$).

Lorsque $k \in]-2, 2[$, l'équation $\varphi(x) = -k$ admet trois solutions $\alpha_k^1 \in]-2, -1[$, $\alpha_k^2 \in]-1, 1[$ et $\alpha_k^3 \in]1, 2[$.

2. Il résulte de l'étude précédente que

- Si $k \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ alors $x^3 - 3x + k \geq 0$ si et seulement si $x \geq \alpha_k$.
- Si $k \in]-2, 2[$ alors $x^3 - 3x + k \geq 0$ si et seulement si $x \in]\alpha_k^1, \alpha_k^2[\cup]\alpha_k^3, +\infty[$.

3. Soit $k > 2$, le point (x, y) appartient à $\mathcal{C}_k$ si et seulement si $-x^3 + 3x + y^2 = k$, c'est-à-dire

$$y^2 = x^3 - 3x + k \tag{5}$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} x \in [\alpha_k, +\infty[\\ y = g_k(x) \;\text{ ou }\; y = -g_k(x) \end{cases}$$

en notant

$$g_k(x) = \sqrt{x^3 - 3x + k}$$

Soit $\mathcal{C}_k^+$ la courbe représentative de g_k et $\mathcal{C}_k^-$ de $-g_k$, il vient que $(x, y) \in \mathcal{C}_k$ si et seulement si $(x, y) \in \mathcal{C}_k^+ \cup \mathcal{C}_k^-$.

La fonction g_k est dérivable sur $]\alpha_k, +\infty[$ et

$$g_k'(x) = \frac{3}{2\sqrt{x^3 - 3x + k}}(x^2 - 1)$$

On a $\alpha_k < -2$. L'étude de cette fonctionne donne le tableau de variations suivant

x	α_k		-1		1		$+\infty$
signe de $g_k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de g_k	0	$\nearrow$	$\sqrt{k+2}$	$\searrow$	$\sqrt{k-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Le graphe de g_3 est présenté figure 4

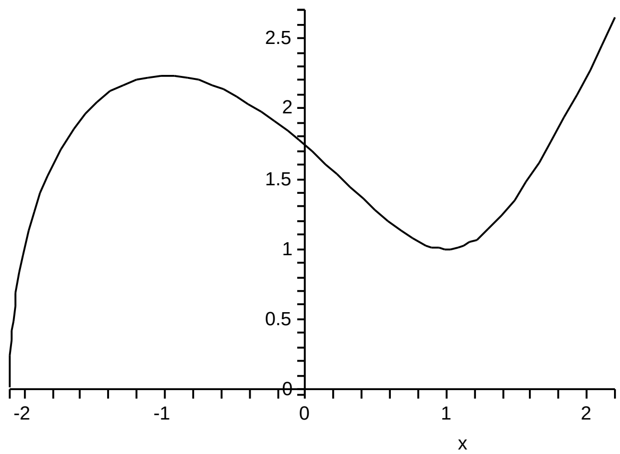

Figure 4: Courbe $\mathcal{C}_3^+$

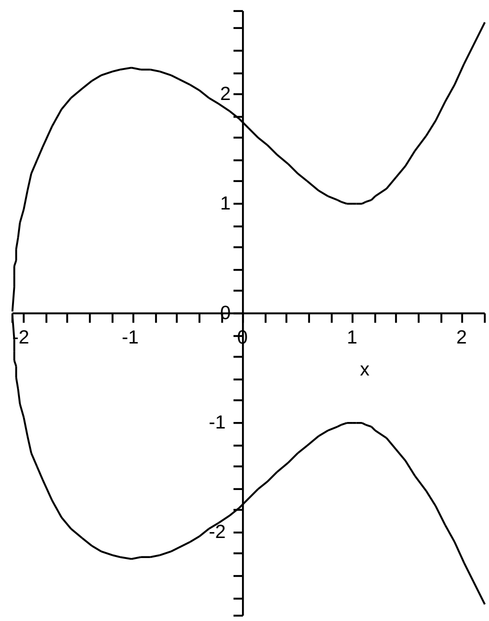

Figure 5: Courbe $\mathcal{C}_3$

Une symétrie orthogonale d'axe (xx') permet de déduire de $\mathcal{C}_3^+$, l'ensemble $\mathcal{C}_3^-$. La figure 5 représente $\mathcal{C}_3$.

On représente figure 6 quelques ensembles $\mathcal{C}_k$ pour différentes valeurs de $k > 2$.

4. Lorsque $k < 2$ la situation est analogue jusqu'à (5). Il convient alors de distinguer trois sous-cas : $k < -2$, $k \in]-2, 2[$ et $k = -2$.

Dans le premier cas où $k < -2$, le problème est identique à celui qui a été traité à la question 3, à ceci près que $\alpha_k > 2$. Ainsi g_k est croissante sur son domaine de définition. On obtient alors les courbes $\mathcal{C}_k^+$ puis (par symétrie) $\mathcal{C}_k^-$ ce qui conduit à des courbes représentées figure 7.

Dans le second cas où $k \in]-2; 2[$, le domaine de définition de g_k est $[\alpha_k^1, \alpha_k^2] \cup [\alpha_k^3, +\infty[$. La fonction g_k est dérivable sur $]\alpha_k^1, \alpha_k^2[\cup]\alpha_k^3, +\infty[$. On obtient que g_k est croissante sur $[\alpha_k^1, -1]$, décroissante sur $[-1, \alpha_k^2]$ et croissante sur $[\alpha_k^3, +\infty[$. On obtient alors les courbes $\mathcal{C}_k^+$ puis (par symétrie) $\mathcal{C}_k^-$, ce qui conduit à des courbes représentées figure 8.

Il reste le cas où $k = -2$, le domaine de définition de g_k est $\{-1\} \cup [2, +\infty[$. La courbe $\mathcal{C}_{-2}$ est constituée du point $(-1; 0)$ et d'une courbe du type de celles de la figure 7.

5. Lorsque k parcourt différentes valeurs de k, on obtient les courbes représentées figure 9.

6. Les courbes de niveau de f dans $B_\infty(A, 0.05)$ sont données par la figure 10.

Les tangentes définies dans la question 4 de l'exercice I représentent l'ensemble $\mathcal{C}_k$ lorsque $k = 2$. Ces droites definissent 4 secteurs angulaires. Dans secteurs angulaires région se situant à gauche (G) et à droite (D) de ces droites, on a $k < 2$. Dans les secteurs angulaires se situant en haut (H) et en bas (B) de ces droites, on a $k > 2$.

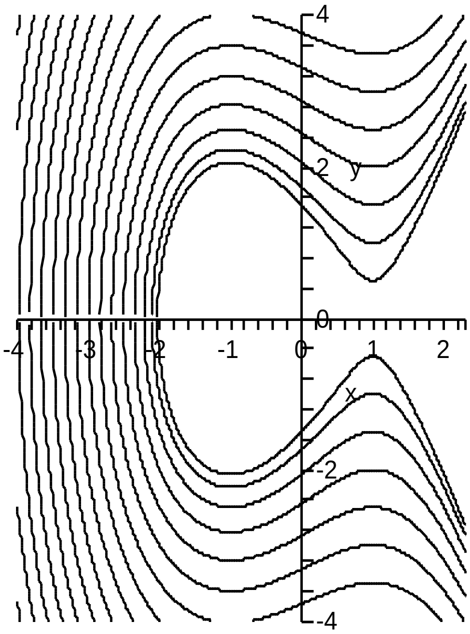

Figure 6: Courbes $\mathcal{C}_k$ pour quelques valeurs de $k > 2$

7. On a $f(A) = 2$.

La fonction f ne peut pas admettre un maximum en A puisque dans les régions (H) et (B) la fonction f admet des valeurs supérieures à $f(A)$.

La fonction f ne peut pas admettre un minimum en A puisque dans les régions (G) et (D) la fonction f admet des valeurs inférieures à $f(A)$.

Par suite f n'admet pas d'extremum en A.

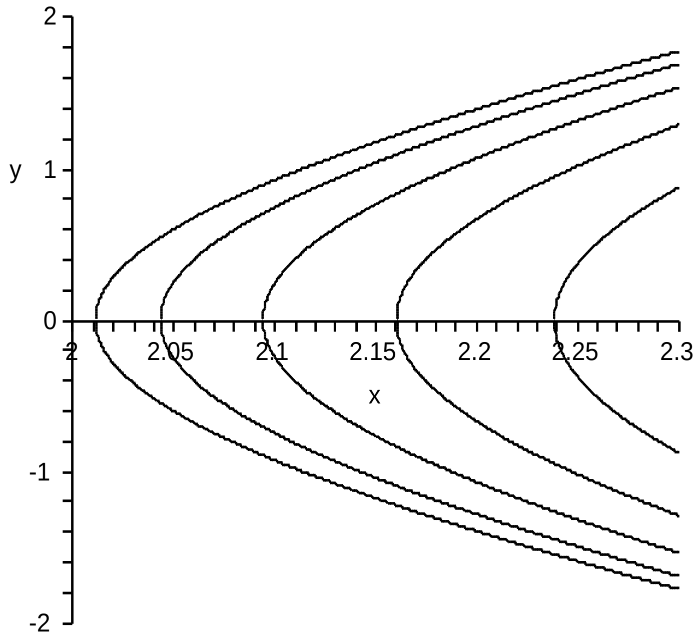

Figure 7: Courbes $\mathcal{C}_k$ pour quelques valeurs de $k < -2$

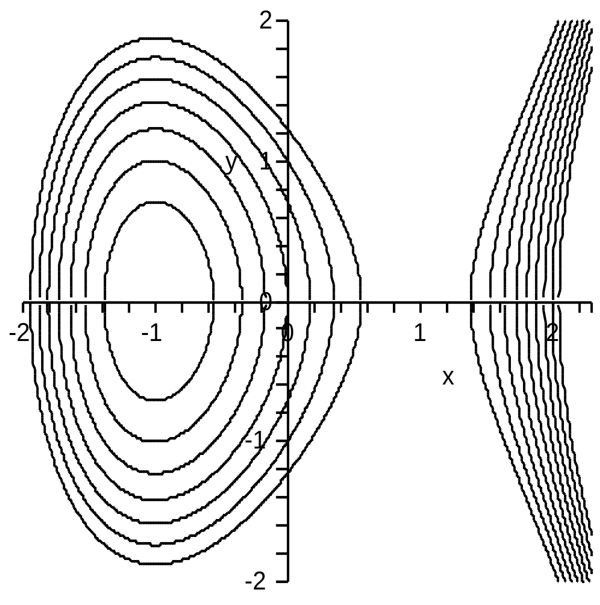

Figure 8: Courbes $\mathcal{C}_k$ pour quelques valeurs de $k \in]-2, 2[$

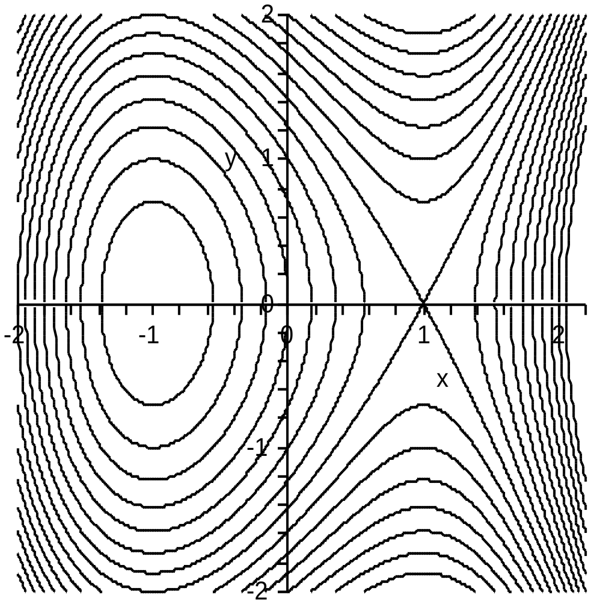

Figure 9: Courbes $\mathcal{C}_k$ pour quelques differentes valeurs de k

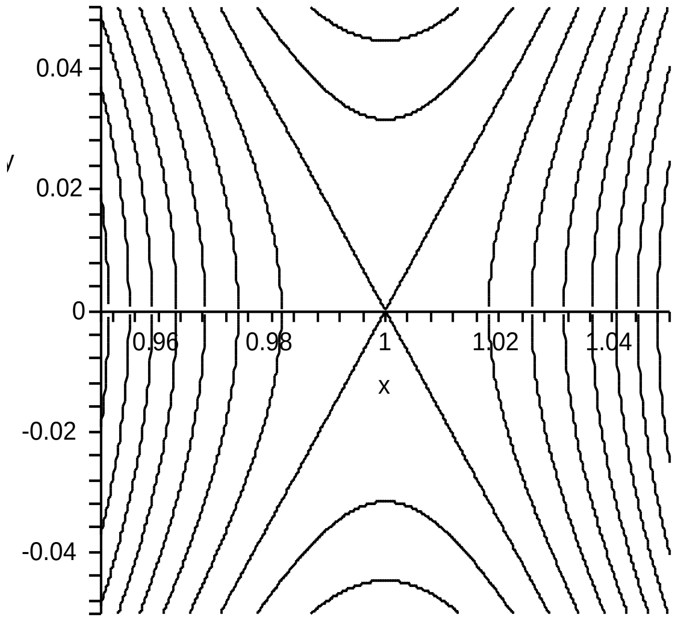

Figure 10: Enembles $\mathcal{C}_k \cap B_\infty(A, 0.05)$ pour quelques differentes valeurs de k