Corrigé de la feuille d'exercices 2

Exercices non corrigés en TD

Exercice IV

Le point $(1/2, 1/2, 1/2)$ est un minimum et le point $(-1, -1, 2)$ est un maximum. Pour le démontrer, on choisit la fonction objectif $f(x, y, z) = x^2+y^2+z^2$ (on fait un raisonnement analogue aux exercices I et V) et les contraintes $h_1(x, y, z) = x+y+2z-2 = 0$, $h_2(x, y, z) = z-x^2-y^2 = 0$. Il faut donc minimiser/maximiser $f(x, y, z)$ sous les contraintes $h_1(x, y, z) = 0$ et $h_2(x, y, z) = 0$. On calcule alors $\nabla h_1(x, y, z) = (1, 1, 2)$ et $\nabla h_2(x, y, z) = (-2x, -2y, 1)$. On en déduit que les vecteurs $\nabla h_1(x, y, z)$ et $\nabla h_2(x, y, z)$ sont linéairement indépendant pour tous points (x, y, z) satisfont ces contraintes. On calcule $\nabla f(x, y, z) + \lambda_1 \nabla h_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla h_2(x, y, z) = (0, 0, 0)$, on a alors :

- soit $\lambda_2 = 1$, alors $\lambda_1 = 0$, d'où $z = -1/2$, contradiction avec $z = x^2 + y^2 \geq 0$.
- soit $x = y$, c'est-à-dire $x + z = 1$ et $z = 2x^2$. Toutes solutions du système sont

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 2 \\ \lambda_1 = -10/3 \\ \lambda_2 = 8/3 \end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = 1/2 \\ \lambda_1 = -2/3 \\ \lambda_2 = 1/3 \end{array}\right.$$

On calcule L_{XX}. Pour le point $(x, y, z) = (1/2, 1/2, 1/2)$, on montre que c'est un minimum. En fait, en utilisant la valeur de λ_2, on déduit que L_{XX} est définie positive, ce qui assure que ce point est un minimum. Pour le point $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$, on peut montrer que c'est un maximum.

Exercice V

1. Soit $g(x) = 4x^3 + x - 1$, la fonction est polynomiale donc dérivable et $g'(x) = 12x^2 + 1 > 0$ ainsi g est strictement croissante. En outre $\lim_{-\infty} g = -\infty$, $\lim_{+\infty} g = +\infty$ et g est continue. Ainsi g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, elle a donc une seule racine. Comme $g(\frac{1}{2}) = 0$ on a $\frac{1}{2}$ comme unique racine de g.

2. Soit (x, y, z) un point du paraboloïde. La distance de ce point à $(1, 1, 0)$ est

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2}$$

or $z = x^2 + y^2$ ainsi cette distance se ré-écrit $\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2+y^2)^2}$. Il s'agit de trouver (x, y) qui minimise cette fonction. Comme $t \mapsto t^2$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et que la distance est positive, il convient de minimiser la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x^2+y^2)^2$. On a

$$\nabla f(x, y) = 2 \begin{pmatrix} x - 1 + 2x(x^2+y^2) \\ y - 1 + 2y(x^2+y^2) \end{pmatrix}$$

ainsi (x, y) est un point critique de f si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} x - 1 + 2x(x^2+y^2) = 0 \\ (x-y) + 2(x^2+y^2)(x-y) = 0 \end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l}(x-y)(1+2x^2+2y^2)=0\\ x-1+2x(x^2+y^2)=0\end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l}x=y\\ 4x^3+x-1=0\end{array}\right.$$

en vertu de la question 1, ce système équivaut à $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$. Par ailleurs,

$$\mathrm{H}\,f(x,y)=2\begin{pmatrix}1+6x^2+2y^2 & 4xy\\ 4xy & 1+6y^2+2x^2\end{pmatrix}$$

donc

$$\mathrm{H}\,f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\begin{pmatrix}6 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

le determinant de cette matrice est $32>0$ et la trace est $12>0$ donc la matrice a deux valeurs propres strictement positives, par suite $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est un minimum de f.

Exercice IX

Considérons la fonction L définie sur $\mathbb{R}^5$ par

$$L(x,y,z,\lambda\alpha)=x^2+5xy-\frac{5}{96}z^3-\lambda(x+y+z-5+\alpha^2)$$

Le point (x,y,z,λ,α) est critique si et seulement si $\nabla L(x,y,z,\lambda,\alpha)=0$ ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l}2x+5y-\lambda=0\\ 5x-\lambda=0\\ -\frac{5}{32}z^2-\lambda=0\\ x+y+z-5+\alpha^2=0\\ \alpha\lambda=0\end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \lambda=-\frac{5}{32}z^2\\ x=-\frac{1}{32}z^2\\ y=-\frac{1}{32}z^2+\frac{1}{80}z^2\\ x+y+z-5=0\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}\lambda=0\\ 2x+5y=0\\ 5x=0\\ -\frac{5}{32}z^2=0\\ x+y+z-5+\alpha^2=0\end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ (z-10)^2=0\\ x=-\frac{1}{32}z^2\\ y=-\frac{3}{160}z^2\\ \lambda=-\frac{5}{32}z^2\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}\lambda=0\\ \alpha^2=5\\ (x,y,z)=(0,0,0)\end{array}\right.$$

ce qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \lambda=-\frac{125}{8}\\ (x,y,z)=(-\frac{25}{8},-\frac{15}{8},10)\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l}\lambda=0\\ \alpha^2=5\\ (x,y,z)=(0,0,0)\end{array}\right.$$

Il y a donc deux points candidats à être minimum sous la contrainte indiquée : $(-\frac{25}{8},-\frac{15}{8},10)$ et $(0,0,0)$.