Feuille d'exercices 2

Optimisation sous contraintes d'égalité

Exercice I

Trouver les points du plan $2x - y + z = 1$ qui sont le plus près du point $(-4, 1, 3)$.

Exercice II

Trouver trois nombres positifs dont la somme est 100 et dont le produit est maximum.

Exercice III

Une société de cablage doit placer un routeur gérant trois sites : A, B et C. Elle souhaite minimiser la longueur de cable utilisée. On suppose que (ABC) forme un triangle isocèle rectangle. Trouver le point F qui minimise $FA + FB + FC$. Un tel point est appelé point de Fermat[1].

Exercice IV

Le plan d'équation $x + y + 2z = 2$ intersecte le paraboloid d'équation $z = x^2 + y^2$ en une ellipse. Trouver les points de l'ellipse qui sont le plus proche et le plus éloigné de l'origine.

Exercice V

1. Montrer que $x = \frac{1}{2}$ est la seule solution réelle de $4x^3 + x - 1 = 0$.

2. Déterminer le ou les points du paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ qui se trouvent le plus près du point $(1, 1, 0)$.

---

[1] Pierre Fermat, mathématicien français, du XVIIe siècle fut conseiller au parlement de Toulouse, il se passionnait pour les mathématiques. Il fonde en même temps que Descartes la gèométrie analytique, est précurseur du calcul différentiel et il est à l'origine du calcul des probabilités avec Pascal. En étudiant l'arithmétique, il s'intéressa au chapitre concernant les triplets de Pythagore, c'est-à-dire aux ensembles de trois nombres x, y, z (par exemple 3, 4 et 5), pour lesquels l'égalité $x^2 + y^2 = z^2$ est vérifiée. D'après Fermat, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution entiére pour $n > 2$. Par exemple, il n'existe pas d'entiers positifs x, y et z tels que $x^3 + y^3 = z^3$. Dans la marge de son exemplaire des *Arithmétiques*, il écrivit qu'il avait découvert une démonstration vraiment remarquable, mais qu'il ne pouvait l'écrire dans la marge (grand théorème de Fermat). Cette démonstration fut cherchée pendant 300 ans sans succès. En 1993, Andrew Wiles, trouve une démonstration du grand théorème de Fermat.

Pierre Fermat (1601-1665)

Exercice VI

Trouver les extrema des fonctions f suivantes sur le domaine D indiqué

1. $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2$, D étant le triangle fermé de sommets $(-1, 1)$, $(2, 1)$ et $(-1, -2)$.

2. $f(x, y) = 2x^3 + y^4$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

Exercice VII

Utiliser les multiplicateurs de Lagrange pour trouver les extrema potentiels des fonctions f suivantes sous la contrainte indiquée. Dites lorsque l'on peut garantir qu'il s'agit d'un extremum.

1. $f(x, y) = x^2 - y^2$ avec $x^2 + y^2 = 1$

2. $f(x, y) = 4x + 6y$ avec $x^2 + y^2 = 13$

3. $f(x, y) = x^2 y$ avec $x^2 + 2y^2 = 6$

4. $f(x, y) = x^2 + y^2$ avec $x^4 + y^4 = 1$

5. $f(x, y, z) = 2x + 6y + 10z$ avec $x^2 + y^2 + z^2 = 35$

6. $f(x, y, z, t) = x + y + z + t$ avec $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$

7. $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i$ avec $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$

8. $f(x, y, z) = x + 2y$ avec $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$

Exercice VIII

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On consière A une matrice $n \times n$ et B un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = x^T A x + B \cdot x$$

où x^T est la transposée de x et le $B \cdot x$ le produit scalaire de B et x.

1. Calculer ∇f

2. Calculer $\mathrm{H}\, f$

Exercice IX

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x, y, z) = x^2 + 5xy - \frac{5}{96} z^3$$

Trouver les points candidats à être minimum de f sous la contrainte $x + y + z \leq 5$.