Pôle Universitaire Léonard de Vinci | S2 – Année 2003-2004
CS 103 – Analyse I | Promotion ESILV 2008

Interrogation du 12/03/2004

Corrigé

Exercice I

1. Le réel x est un équilibre si et seulement si $x = x + \exp(x) + \alpha$, c'est-à-dire si et seulement si $\exp(x) = -\alpha$.

- Si $\alpha \geq 0$ alors $\exp(x) = -\alpha$ n'a pas de solution donc il n'y a pas d'équilibre.
- Si $\alpha < 0$ alors $\exp(x) = -\alpha$ équivaut à $x = \ln(-\alpha)$, il y a donc un seul équilibre : $\ln(-\alpha)$.

2. Plaçons nous dans le cas où $\alpha < 0$. Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+\exp(x)+\alpha$. Cette fonction est dérivable et $f'(x) = 1 + \exp(x)$ Comme $-\alpha > 0$ il vient $\exp(-\alpha) > 1$ donc $f'(-\alpha) > 1$, par suite l'équilibre n'est pas localement stable.

Exercice II

1. Pour tout $n \geq 1$ entier, on a

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} & \text{(définition)} \\ u_n = u_n & \text{(trivial)} \end{cases}$$

donc

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Posons donc

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

il vient $X_{n+1} = AX_n$.

2. Soit $(\mathcal{P}_n)$ la proposition $X_n = A^{n-1}X_1$.

- On a $A^0 = I$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
- Supposons $X_n = A^{n-1}X_1$. On a $X_{n+1} = AX_n$ donc $X_{n+1} = AA^{n-1}X_1$ par suite on a $X_{n+1} = A^{(n+1)-1}X_1$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

On a établit que $X_n = A^{n-1}X_1$ pour tout entier $n \geq 1$.

3. Le déterminant de P est

$$\det P = r_1 - r_2 = -\sqrt{a^2+4b} \neq 0$$

par suite P est inversible. On a

$$P^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} & \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} & -\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+4b}} \\ \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{a^2-a\sqrt{a^2+4b}+4b}{2\sqrt{a^2+4b}} & 0 \\ 0 & \frac{a^2+a\sqrt{a^2+4b}+4b}{2\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

4. Il résulte de la question précédente que $A = PDP^{-1}$. Soit $n \geq 1$ un entier, on a

$$A^{n-1} = (PDP^{-1})^{n-1} = PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1}$$

Comme $P^{-1}P = I$, il vient $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$. La question 2 de l'exercice I permet de conclure que $X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$.

5. Une récurrence immédiate donne

$$D^{n-1} = \begin{bmatrix} r_1^{n-1} & 0 \\ 0 & r_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

donc

$$PD^{n-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{{r_1}^n-{r_2}^n}{r_1-r_2} & \frac{-{r_1}^n r_2+{r_2}^n r_1}{r_1-r_2} \\ \frac{{r_1}^{n-1}-{r_2}^{n-1}}{r_1-r_2} & \frac{-{r_1}^{n-1}r_2+{r_2}^{n-1}r_1}{r_1-r_2} \end{bmatrix}$$

or

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

donc

$$PD^{n-1}P^{-1}X_1 = \begin{bmatrix} \frac{{r_1}^n-{r_2}^n}{r_1-r_2} \\ \frac{{r_1}^{n-1}-{r_2}^{n-1}}{r_1-r_2} \end{bmatrix}$$

donc

$$u_n = \frac{1}{r_1-r_2}r_1^n + \frac{-1}{r_1-r_2}r_2^n$$

Exercice III

1. Soit $A =]-1,3[\cup\{2\}$. On a $A =]-1,3[$. Soit $x \in A$ et $\varepsilon = \min\{|x-3|, |x-(-1)|\}$ alors $\varepsilon > 0$ et $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset A$. Donc A est un voisinage de x. Par suite A est voisinage de chacun de ses points : c'est un ouvert.

2. L'ensemble $]-1,3[\cup\{4\}$ n'est pas ouvert puisqu'il n'est pas voisinage de 4. En effet $\forall\varepsilon > 0,\ ]4-\varepsilon, 4+\varepsilon[\not\subset]-1,3[\cup\{4\}$.

Exercice IV

Notons $A = \cap_{n=0}^{+\infty}]-u_n, u_n[$. Comme $0 \in]-u_n, u_n[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 \in A$ ainsi $\{0\} \subset A$.

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \neq 0$, et $\varepsilon = |x|$. Comme (u_n) converge vers 0, il existe un rang N tel que $n \geq N$ entraine $|u_n| < \varepsilon$. Donc $x \notin]-u_n, u_n[$ donc $x \notin A$. Ainsi $A \subset \{0\}$.

Conclusion : $A = \{0\}$.