Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2008

Interrogation du 12/03/2004

Durée de l'épreuve : 1 heure 15

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

Exercice I (4 points)

Soit α un paramètre réel. Considérons la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + \exp(u_n) + \alpha$$

1. La relation de récurrence admet-elle un ou des équilibres ? Si oui, lequel ou lesquels ? Vous pouvez discuter selon α.

2. Pour chaque équilibre trouvé, dites s'il est localement stable ou pas.

Exercice II (8 points)

Soit a et b deux réels tels que $a^2 + 4b > 0$ et (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} \end{cases}$$

On note

$$r_1 = \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}$$

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer une matrice A, indépendante de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Montrer que $X_n = A^{n-1}X_1$.

3. Montrer que P est inversible et que $P^{-1}AP = D$.

4. En déduire que $X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5. Déterminer le terme général de (u_n).

Exercice III (4 points)

1. L'ensemble $]-1,3[\cup\{2\}$ est-il un ouvert ?

2. L'ensemble $]-1,3[\cup\{4\}$ est-il un ouvert ?

Exercice IV (4 points)

Soit (u_n) une suite strictement positive convergent vers 0. Montrer que

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty}]-u_n, u_n[= \{0\}$$