

## Interrogation du 12/03/2004

*Durée de l'épreuve : 1 heure 15*

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.

### Exercice I (4 points)

Soit  $\alpha$  un paramètre réel. Considérons la relation de récurrence

$$u_{n+1} = u_n + \exp(u_n) + \alpha$$

1. La relation de récurrence admet-elle un ou des équilibres ? Si oui, lequel ou lesquels ? Vous pouvez discuter selon  $\alpha$ .
2. Pour chaque équilibre trouvé, dites s'il est localement stable ou pas.

### Exercice II (8 points)

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a^2 + 4b > 0$  et  $(u_n)$  la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} \end{cases}$$

On note

$$r_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$
$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

1. Déterminer une matrice  $A$ , indépendante de  $n$ , telle que  $X_{n+1} = AX_n$ .
2. Montrer que  $X_n = A^{n-1}X_1$ .
3. Montrer que  $P$  est inversible et que  $P^{-1}AP = D$ .
4. En déduire que  $X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
5. Déterminer le terme général de  $(u_n)$ .

**Exercice III** (4 points)

1. L'ensemble  $] - 1, 3[ \cup \{2\}$  est-il un ouvert ?
2. L'ensemble  $] - 1, 3[ \cup \{4\}$  est-il un ouvert ?

**Exercice IV** (4 points)

Soit  $(u_n)$  une suite strictement positive convergent vers 0. Montrer que

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} ] - u_n, u_n[ = \{0\}$$