Pôle Universitaire Léonard de Vinci | S1 – Année 2003-2004
CS 103 – Analyse I | Promotion ESILV 2008

Interrogation du 16/12/2003

Corrigé

Exercice I

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(1-x)$ alors

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+1} \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2n^2+2}{n^2+n} \times \frac{f(1-\frac{2}{n}) - f(0)}{\frac{2}{n} - 0}$$

or

$$\begin{cases} \lim \frac{2n^2+1}{n^2+2} = 2 \\ \lim \frac{f(1-\frac{2}{n})-f(0)}{\frac{2}{n}-0} = f'(0) = -1 \end{cases}$$

Par suite $\lim u_n = -2$.

Exercice II

Soit $\varepsilon > 0$ Posons

$$N = \begin{cases} \mathrm{E}\left(\frac{1}{\sqrt{\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)-2}}\right) & \text{si } \varepsilon \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il vient

$$\begin{aligned} n > N \quad & \Rightarrow \quad \begin{cases} n > \sqrt{\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - 2} & \text{si } A \geq 0 \\ n > 0 & \text{sinon} \end{cases} \\ & \Rightarrow \quad n^2 > \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - 2 \\ & \Rightarrow \quad \ln(n^2+2) > \frac{1}{\varepsilon} \\ & \Rightarrow \quad \frac{1}{\ln(n^2+2)} < \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui établit que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \to |u_n| \leq \varepsilon$ donc $\lim u_n = 0$.

Exercice III

1. Considérons la fonction f définie sur $[8, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Cette fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables non nulles sur son domaine de définition, on a

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2\ln x}{(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)(\ln x - 2)}{(\ln x)^4}$$

On sait que $\ln 8 > 2$ donc $f'(x) > 0$ donc f est croissante. Par suite (v_n) est croissante des que $n \geq 8$.

2. On a $v_8 = \frac{8}{(\ln 8)^2}$. Comme $\ln 8 < 2.1$ on a $(\ln 8)^2 < 2.1^2$, et $2.1^2 = (2+0.1)^2 = 4+0.4+0.01 = 4.41 < 8$. Ainsi $\frac{8}{(\ln 8)^2} > 1$ et donc $v_8 > 1$. Comme (v_n) est croissante on en déduit que $v_n \geq v_8 > 1$ lorsque $n \geq 8$. Ainsi $\frac{n}{(\ln n)^2} \geq 1$, donc $n \geq (\ln n)^2$.

3. Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $N = \max\{8; \mathrm{E}(e^A)+1\}$, alors pour $n \geq N$ on a $n \geq e^A$ donc $\ln n \geq A$ donc $\ln n(\ln n - A) \geq 0$ donc $(\ln n)^2 - A \ln n \geq 0$ Or comme $n \geq 8$ on a $n \geq (\ln n)^2$ ainsi $n - A\ln n \geq 0$ donc $n \geq A \ln n$ d'où finalement $\frac{n}{\ln n} \geq A$. On a montré que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$$

ainsi $\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$.

Exercice IV

1. La suite (u_n) converge vers l donc il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $i > N_1$ entraine $|u_i - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, par suite

$$\sum_{i=N_1}^{n} |u_i - l| < (n - N_1 + 1)\frac{\varepsilon}{2}$$

donc

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=N_1}^{n} |u_i - l| < \frac{n+1-N_1}{n+1}\frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{1}$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. On a montré qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{i=N_1}^{n} |u_i - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $A = \sum_{i=0}^{N_1-1} |u_i - l|$.

- Si $A \neq 0$ alors comme $\lim \frac{1}{n+1} = 0$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_2$ entraine $\frac{1}{n+1} < \frac{A}{2\varepsilon}$, ainsi

$$\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{N_1-1} |u_i - l| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

  On a

$$|\sigma_n - l| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(u_i - l)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}|u_i - l| = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{N_1-1}|u_i - l| + \frac{1}{n+1}\sum_{i=N_1}^{n}|u_i - l|$$

  Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors pour $n \geq N$ les inéquations (1) et (2) sont satisfaites, ainsi $|\sigma_n - l| < \varepsilon$.

- Si $A = 0$ alors

$$|\sigma_n - l| = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}(u_i - l)\right| \leq \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}|u_i - l| = \frac{1}{n+1}\sum_{i=N_1}^{n}|u_i - l| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

  Posons $N = N_1$, alors pour $n \geq N$ alors $|\sigma_n - l| < \varepsilon$.

On a démontré que $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow |\sigma_n - l| < \varepsilon$ alors $\lim \sigma_n = l$.

3. Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$, cette suite diverge. Pourtant $|\sigma_n| \leq \frac{1}{n+1}$ donc (σ_n) converge vers 0.