Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2008

# Interrogation du 16/12/2003

*Durée de l'épreuve : 1 heure 15*

**L'usage des calculatrices et des documents est interdit. On pourra utiliser les inégalités suivantes**

$$2 < \ln 8 < 2.1$$
$$1.7 < \sqrt{3} < 1.8$$

**Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.**

## Exercice I (4 points)

Calculer la limite de la suite $(u_n)$ définie pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \frac{n^2+1}{n+1} \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

## Exercice II (4 points)

En utilisant la définition de la limite, étudier la limite de $(u_n)$ définie par

$$u_n = \frac{1}{\ln(n^2+2)}$$

## Exercice III (6 points)

**1.** Soit $(v_n)_{n\geq 2}$ la suite définie par

$$v_n = \frac{n}{(\ln n)^2}$$

Montrer que cette suite est croissante des son 7e terme (c'est-à-dire pour $n \geq 8$).

**2.** En déduire que pour tout entier $n \geq 8$ on a

$$n \geq (\ln n)^2$$

**3.** En utilisant la définition de la limite, montrer que

$$\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$$

## Exercice IV (6 points)

Soit $(u_n)$ une suite. Notons $(\sigma_n)$ la suite définie par

$$\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} u_i$$

**1.** On suppose que $(u_n)$ converge vers un réel $l$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n > N_1,\ \frac{1}{n+1} \sum_{i=N_1}^{n} |u_i - l| < \frac{\varepsilon}{2}$$

**2.** En déduire que si $(u_n)$ converge alors $(\sigma_n)$ converge vers la même limite.

**3.** Est-il possible que $(\sigma_n)$ converge sans que $(u_n)$ ne converge ? Si oui, donner un exemple. Si non, donnez une démonstration.