Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2008

Examen du 23/04/2003

Corrigé

Exercice I

1. L'ensemble A n'est pas ouvert. Par exemple, il n'est pas voisinage de 3.

2. L'ensemble A n'est pas fermé Par exemple, la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par $u_n = \frac{1}{n}$ est une suite convergente d'éléments de A qui converge vers $0 \notin A$.

3. L'ensemble A n'est pas fermé donc il n'est pas compact.

4. On a $\mathring{A} =]-1,0[\cup]0,1[$ et $\overline{A} = [-1,1] \cup \{3,4\}$ car $]-1,0[\cup]0,1[$ est le plus grand ouvert contenu dans A et $[-1,1] \cup \{3,4\}$ le plus petit fermé contenant A. Ainsi $\partial A = \{-1;0;1;3;4\}$.

5. On a $\{3,4\} \subset A^*$ car $]3-\frac{1}{2}, 3+\frac{1}{2}[\cap A = \{3\}$ et $]4-\frac{1}{2}, 4+\frac{1}{2}[\cap A = \{4\}$. D'autre part soit $x \in [-1,1]$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\cap A \neq \{x\}$ donc $x \notin A^*$. Comme $A^* \cup A' = \overline{A}$ et $A^* \cap A' = \emptyset$ on a $A' = [-1,1]$ et $A^* = \{3;4\}$.

Exercice II

Soit $A =]0,1[\cup]1,2[$ et $B =]0,2[$ alors A et B sont des ouverts et $\overline{A} = \overline{B}$ pourtant $A \neq B$. Le réponse à la question est NON.

Exercice III

1. Si $a > 0$ alors considérons la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = -\frac{1}{n}$. Cette suite est une suite convergente d'éléments de E_a mais elle converge vers 0 qui n'est pas dans E_a. Donc E_a n'est pas fermé.

Si $a = 0$ alors

$$\mathbb{R} \setminus E_a =]-\infty, -1[\cup \left(\cup_{n=1}^{+\infty} \left] -\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1} \right[\right) \cup]0, +\infty[$$

est un ouvert donc E_a est un fermé.

Si $a < 0$ alors $-\frac{1}{n} > a$ lorsque $n \geq \mathrm{E}(\frac{1}{a}) + 1$ donc en posant $N = \mathrm{E}(\frac{1}{a}) + 1$ il vient

$$E_a = [a, +\infty[\cup \left\{ -\frac{1}{n},\ n \in [\![1, N]\!] \right\}$$

lequel est une réunion finie de fermés, c'est donc un fermé.

Conclusion : E_a est un fermé si et seulement si $a \leq 0$.

2. Le point 0 est adhérent à a puisque la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ converge vers 0. D'autre part $E_a \subset \overline{E_a}$ donc

$$\left\{-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\} \cup [a, +\infty] \subset \overline{E_a}$$

or $\left\{-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\} \cup [a, +\infty]$ est un fermé donc c'est le plus petit fermé contenant E_a, par suite

$$\overline{E_a} = \left\{-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\} \cup [a, +\infty]$$

D'autre part E_a n'est pas voisinage de $\frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et n'est pas voisinage de a. Ainsi

$$\overset{\circ}{E_a} \subset]a, +\infty[$$

Comme $]a, +\infty[$ est un ouvert, c'est le plus grand ouvert contenu dans E_a, donc

$$\overset{\circ}{E_a} =]a, +\infty[$$

3. En vertu de la question 1, E_0 est un fermé donc $\overline{E_0} = E_0$. D'autre part $\overset{\circ}{E_0} =]0, +\infty[$ car c'est le plus grand ouvert contenu dans E_0.

Exercice IV

1. Lorsque $E = [0, 1[$ on a $\overline{E} = [0, 1]$ en outre E n'admet aucun point isolé donc $E' = [0, 1]$.

Lorsque $E = \{1\} \cup]2, 3[$ on a $\overline{E} = \{1, \} \cup [2, 3]$, comme le seul point isolé de E est 1, il vient $E' = [2, 3]$.

2. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus E'$. alors $x \notin E'$ donc l'assertion suivante est fausse

$$\forall \alpha > 0,]x - \alpha, x + \alpha[\cap (E \setminus \{x\}) \neq \emptyset$$

donc

$$\exists \alpha > 0,]x - \alpha, x + \alpha[\cap (E \setminus \{x\}) = \emptyset$$

Soit $y \in]x - \alpha, x + \alpha[$. Notons $\varepsilon = \min\{y - (x - \alpha), (x + \alpha) - y\}$ de sorte que $]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\subset]x - \alpha, x + \alpha[$ alors

$$]y - \varepsilon, y + \varepsilon[\cap (E \setminus \{x\}) = \emptyset$$

donc $y \notin E'$ donc $y \in U$. Il en résulte que $]x - \alpha, x + \alpha[\subset U$.

3. La question précédente montre que U est un ouvert, donc son complémentaire E' est un fermé. Donc $\overline{E'} = E'$.

4. La réponse est non comme le montre le contre-exemple

$$E = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{\frac{1}{n}\right\}$$

On a $E^* = E$, pourtant cet ensemble n'est pas un fermé puisqu'il existe une suite (par exemple $u_n = \frac{1}{n}$) dont les éléments sont dans E mais qui converge vers $0 \notin E$).