Examen du 23/04/2004

Durée de l'épreuve : 2 heures

L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées. Ce sujet est recto-verso.

Exercice I (5 points)

Considérons l'ensemble

$$A = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup\{3; 4\}$$

1. L'ensemble A est-il ouvert ?

2. L'ensemble A est-il fermé ?

3. L'ensemble A est-il compact ?

4. Déterminer $\mathring{A}$, $\overline{A}$ et ∂A.

5. Déterminer A' et A^*.

Exercice II (3 points)

Soit A et B deux ouverts tels que $\overline{A} = \overline{B}$, a-t-on $A = B$?

Exercice III (6 points)

Soit a un réel et

$$E_a = [a, +\infty[\cup \left\{-\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$$

1. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a, l'ensemble E_a est-il fermé ?

2. Determiner $\overline{E_a}$ et $\mathring{E}_a$ lorsque $a = \frac{1}{2}$.

3. Determiner $\overline{E_a}$ et $\mathring{E}_a$ lorsque $a = 0$.

Exercice IV (6 points)

Soit E un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$.

1. Determiner E' dans les cas suivants : $E = [0,1[$ et $E = \{1\} \cup]2,3[$.

2. Soit $U = \mathbb{R} \setminus E'$ et $x \in U$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]x-\alpha, x+\alpha[\subset U$.

3. Montrer que $\overline{E'} = E'$.

4. A-t'on $\overline{E^*} = E^*$?