Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2008

Examen du 5/02/2004

Corrigé

Exercice I

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ donc

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ n>N\Rightarrow |u_n-l|<\varepsilon$$

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ n>N\Rightarrow v_n>A$$

Ainsi, soit $A\in\mathbb{R}$, il existe un entier N_1 tel que si $n>N_1$ alors $v_n>A+1-l$. De même, il existe un entier N_2 tel que si $n>N_2$ alors $|u_n-l|<1$, c'est-à-dire $l-1<u_n<l+1$. En conséquence, il existe $N=\max\{N_1,N_2\}$ tel que $u_n+v_n>A$. Cela établit que

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ n>N\Rightarrow u_n+v_n>A$$

c'est-à-dire que $\lim(u_n+v_n)=+\infty$.

2. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendent vers $+\infty$ donc

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ n>N\Rightarrow u_n>A$$

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ n>N\Rightarrow v_n>A$$

Ainsi, soit $A\in\mathbb{R}$, il existe un entier N_1 tel que si $n>N_1$ alors $u_n>\sqrt{|A|}$. De même, il existe un entier N_2 tel que si $n>N_2$ alors $v_n>\sqrt{|A|}$. En conséquence, il existe $N=\max\{N_1,N_2\}$ tel que $u_nv_n>|A|\geq A$. Cela établit que

$$\forall A\in\mathbb{R},\ \exists N\in\mathbb{N},\ n>N\Rightarrow u_nv_n>A$$

c'est-à-dire que $\lim(u_nv_n)=+\infty$.

Exercice II

Remarquons que $(-1)^{3n}=(-1)^{2n}(-1)^n=(-1)^n$ ainsi le terme général de la série est

$$u_n=\frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$$

Posons $a_n=(-1)^n$ et $b_n=\frac{1}{n+\sqrt{n}}$, on a

i) (b_n) est décroissante puisque $t\mapsto t+\sqrt{t}$ est croissante (somme de deux fonctions croissantes).

ii) (b_n) est positive (quotient de quantités positives)

iii) $\lim b_n=0$ puisque $\lim n=+\infty$ et $\lim\sqrt{n}=+\infty$

iv) Pour tout p et q entiers avec $q\geq p$ on a $\sum_{n=p}^{q}(-1)^n\in\{-1,0,1\}$ donc $\left|\sum_{n=p}^{q}(-1)^n\right|\leq 1$.

Le théorème d'Abel s'applique et donne la convergence de la série de terme général (u_n).

Exercice III

Notons
$$u_n = \frac{an^2+bn+1}{n^3}$$

- Si $a \neq 0$ alors $\lim \frac{u_n}{\frac{a}{n}} = 1$ donc
$$(u_n) \sim \frac{a}{n}$$
Si $a > 0$ alors ces suites sont positives à partir d'un certain rang, elles sont équivalentes et $a\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge (série de Riemann avec $s = 1 \leq 1$) donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge. Si $a < 0$ le raisonnement est analogue pour montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} -u_n$ diverge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ diverge.

- Si $a = 0$ alors
  - Si $b \neq 0$ alors $\lim \frac{u_n}{\frac{b}{n^2}} = 1$ donc
$$(u_n) \sim \frac{b}{n^2}$$
Si $b > 0$ alors ces suites sont positives à partir d'un certain rang, elles sont équivalentes et $b\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge (série de Riemann avec $s = 2 > 1$) donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge. Si $b < 0$ le raisonnement est analogue pour montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} -u_n$ converge, donc $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge.
  - Si $b = 0$ alors $u_n = \frac{1}{n^3}$, la série associée est de Riemann avec $s = 3 > 1$ donc convergente.

Conclusion : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge si et seulement si $a = 0$.

Exercice IV

1. Soit (P_n) la proposition
$$u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$$
alors

- (P_N) est vraie
- Supposons (P_N) vraie, on a $u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$, mais on à aussi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ donc
$$u_n \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{u_N}{v_N} v_n \frac{v_{n+1}}{v_n}$$
ce qui entraine $u_{n+1} \leq \frac{u_N}{v_N} v_{n+1}$, ainsi (P_{n+1}) est vérifiée.

2. Soit f définie par $f(x) = (1+x)^{-s}$, cette fonction est dérivable et $f'(x) = -s(1+x)^{-s-1}$, ainsi $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-s} = f(1/n)$ et $f'(0) = -s$. Posons
$$\varepsilon_n = \frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 + \frac{s}{n}$$
alors $\varepsilon_n = f(\frac{1}{n}) - f(0) - \frac{1}{n} f'(0)$ donc
$$n\varepsilon_n = \frac{f(\frac{1}{n}) - f(0)}{\frac{1}{n}} - f'(0)$$
donc $\lim(n\varepsilon_n) = 0$.

3. Remarquons que $1 < s < r < a$ donc $r - s > 0$ et $a - r > 0$. On a $\lim(n\varepsilon_n) = 0$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |\varepsilon_n| \leq \varepsilon \frac{1}{n}$$

en particulier, pour $\varepsilon = r - s$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1$ entraine $|\varepsilon_n| \leq (r-s)|\frac{1}{n}|$. Par suite $\varepsilon_n \geq (s-r)\frac{1}{n}$, on a alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 - \frac{s}{n} + (s-r)\frac{1}{n}$. Ainsi

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n > N_1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 - \frac{r}{n} \tag{1}$$

La suite (α_n) converge vers a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |\alpha_n - a| \leq \varepsilon$$

en particulier, pour $\varepsilon = a - r$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2$ entraine $|\alpha_n - a| \leq a - r$. Donc $r - a \leq \alpha_n - a$, donc $-\alpha_n \leq -r$, il s'en suit que $1 - \frac{\alpha_n}{n} \leq 1 - \frac{r}{n}$. Ainsi

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ n > N_2 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{r}{n} \tag{2}$$

4. Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Les propositions (1) et (2) impliquent que lorsque $n \geq N$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

or la série de terme général (v_n) converge puisqu'il s'agit d'une série de Riemann avec $s > 1$, en vertu de l'exercice I on conclut que la série de terme général (u_n) converge également.