Pôle Universitaire Léonard de Vinci | S1 – Année 2003-2004
CS 103 – Analyse I | Promotion ESILV 2008

# Examen du 5/02/2004

*Durée de l'épreuve : 2 heures*

**L'usage des calculatrices et des documents est interdit. Les quatre exercices sont indépendants. Le sujet est recto-verso. Le barème est donné à titre indicatif. Les réponses doivent être justifiées.**

## Exercice I (4 points)

Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites. En utilisant la définition de la limite, montrer que

**1.** Si $\lim u_n = l \in \mathbb{R}$ et $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$

**2.** Si $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = +\infty$ alors $\lim(u_n v_n) = +\infty$

## Exercice II (4 points)

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n + \sqrt{n}}$$

## Exercice III (4 points)

Soit $a$ et $b$ deux réels. Quelle est la nature de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{an^2 + bn + 1}{n^3}$$

Discuter selon $a$ et/ou $b$, le cas échéant.

## Exercice IV (8 points)

Soit $(u_n)$ une suite à termes strictement positifs vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

où $(\alpha_n)$ est une suite convergente et $\lim \alpha_n = a > 1$.

**1.** Soit $(v_n)$ une suite à termes strictement positifs telles que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

Montrer que lorsque $n \geq N$ on a

$$u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$$

**2.** Soit $s \in \mathbb{R}$ et $(v_n)$ la suite définie par $v_n = \frac{1}{n^s}$. Montrer que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{s}{n} + \varepsilon_n$$

où la suite $(\varepsilon_n)$ est telle que $\lim(n\varepsilon_n) = 0$

**3.** Soit $s \in ]1, a[$ et $(v_n)$ la suite définie par $v_n = \frac{1}{n^s}$. Posons $r = \frac{s+a}{2}$. Montrer

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n > N_1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 - \frac{r}{n}$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ n > N_2 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{r}{n}$$

**4.** En déduire que la série de terme général $(u_n)$ converge.