# Devoir 4

*Corrigé*

## Exercice I

**1.** Soit $m$ et $m'$ deux réels distincts, alors $(x,y) \in (D_m) \cap (D_{m'})$ équivaut à

$$\left\{ \begin{array}{l} (2m-1)x + (m-1)y + m = 0 \\ (2m'-1)x + (m'-1)y + m' = 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que si $m = 1$ alors la première équation équivaut à $x = -1$ et le système équivaut à $(x,y) = (-1,1)$. Supposons désormais $m \neq 1$. Le système équivaut alors à

$$\left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{2m-1}{m-1}x - \frac{m}{m-1} \\ (2m'-1)x + (m'-1)\left(-\frac{2m-1}{m-1}x - \frac{m}{m-1}\right) + m' = 0 \end{array} \right.$$

ce qui équivaut à

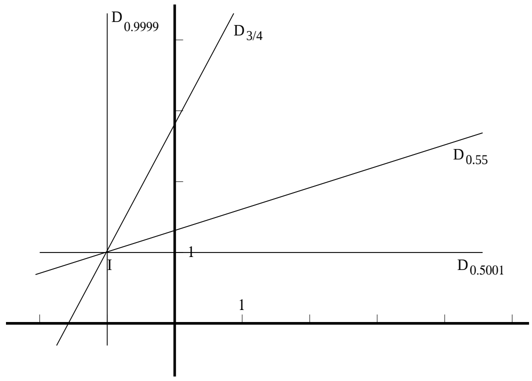
$$\left\{ \begin{array}{l} y = -\frac{2m-1}{m-1}x - \frac{m}{m-1} \\ (m-m')x + (m-m') = 0 \end{array} \right.$$

puisque $m \neq m'$, ce système q́uiaut à $x = -1$ et $y = 1$. Par suite

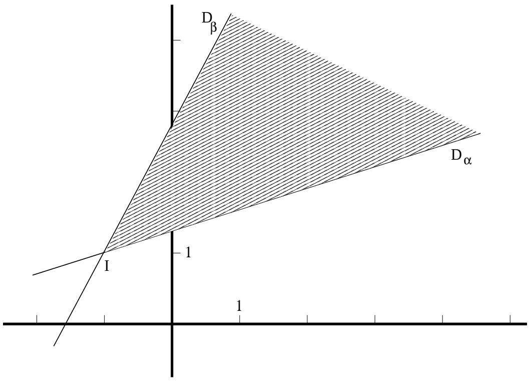
$$(D_m) \cap (D_{m'}) = \{(-1,1)\}$$

On pose $I = (-1,1)$.

**2.** Les droites de $\mathcal{F}$ passent par $I$ et leur coefficient directeur est $\frac{-2m-1}{m-1}$. On obtient ainsi




**3.** Les points de $S_{\alpha,\beta}$ se trouvent au dessus de la droite $D_\alpha$, au dessous de la droite $D_\beta$ et à gauche du point $I$. Cet ensemble est représenté hachuré ci-dessous.




**4.** Le fait que $S_{\alpha,\beta}$ contienne des couples d'entiers non nuls est graphiquement une évidence, il s'agit maintenant de le démontrer. Soit $r$ un entier et $\Delta_r$ la droite déquation $y = r$. Alors

$$\Delta_r \cap D_\alpha = \left\{ \left( -\frac{\alpha}{2\alpha - 1} - \frac{\alpha - 1}{2\alpha - 1} r, r \right) \right\}$$

$$\Delta_r \cap D_\beta = \left\{ \left( -\frac{\beta}{2\beta - 1} - \frac{\beta - 1}{2\beta - 1} r, r \right) \right\}$$

Notons $Q_\alpha$ et $Q_\beta$ respectivement les intersections de $D_\alpha$ et de $D_\beta$ avec $\Delta_r$. La longueur du segment $[Q_\alpha, Q_\beta]$ est $Mr + P$ où $M$ et $P$ sont des réels positifs donnés[1] qui ne dépendent que de $\alpha$ et $\beta$. Il existe donc un entier $r$ à pour le quel $Mr + P > 1$. On peut en outre le choisir pour que $-\frac{\alpha}{2\alpha-1} - \frac{\alpha-1}{2\alpha-1} r > 0$. Ainsi la longueur de $[Q_\alpha, Q_\beta]$ est supérieure à 1 et l'abcisse de $Q_a$ est strictement positive. Il existe $s \in \mathbb{N}^*$ tel que $(s, r) \in [Q_\alpha, Q_\beta] \cap (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)$. par suite $S_{\alpha,\beta} \cap (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*) \neq \emptyset$.

## Exercice II

**1.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction $f_p$ définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_p(x) = \frac{p+x}{2p+x+1}$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, sa dérivée est

$$f_p'(x) = \frac{p+1}{(2p + x + 1)} > 0$$

donc $f_p$ est croissante. On a $\mathrm{Im}(f_p) \subset [f_p(0), \lim_{+\infty} f_p] = [\frac{1}{2}, 1]$. Donc

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \left\{ \frac{p+q}{2p+q+1}, \ q \in \mathbb{N}^* \right\} \subset \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$$

ainsi $A \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

**2.** On a $A \subset [\frac{1}{2}, 1]$. Comme $[\frac{1}{2}, 1]$ est un fermé, il contient le plus petit fermé contenant $A$ donc $\overline{A} \subset [\frac{1}{2}, 1]$.

**3.** Comme $2p + q + 1 > 0$, l'inégailté $\alpha < \frac{p+q}{2p+q+1} < \beta$ équivaut à

$$\alpha(2p + q + 1) < p + q < \beta(2p + q + 1)$$

ce qui équivaut à

$$\begin{cases} (2\alpha - 1)p + (\alpha - 1)q + \alpha < 0 \\ (2\beta - 1)p + (\beta - 1)q + \beta > 0 \end{cases}$$

ce qui équivaut à $(p, q) \in S_{\alpha,\beta} \cap (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)$.

[1]On a $M = \frac{\alpha}{2\alpha-1} - \frac{\beta}{2\beta-1}$ et $P = \frac{\beta-1}{2\beta-1} - \frac{\alpha-1}{2\alpha-1}$.

**4.** On considère $a \in ]\frac{1}{2}, 1[$ et on note $d_1 = a - \frac{1}{2}$ et $d_2 = 1 - a$. Soit $\varepsilon > 0$.

- Si $\varepsilon \in ]0, \min\{d_1, d_2\}[$ alors posons $\alpha = a - \varepsilon$ et $\beta = a + \varepsilon$ on a $\frac{1}{2} < \alpha < \beta < 1$.

  On a montré dans l'exercice I que $S_{\alpha,\beta} \cap (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*)$ est non vide donc il existe au moins un couple $(p, q)$ dans cet ensemble. En vertu de la question précédente ce couple vérifie $\alpha < \frac{p+q}{2p+q+1} < \beta$ ainsi

  $$\frac{p+q}{2p+q+1} \in A \cap ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$$

  par suite $A \cap ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \neq \emptyset$.

- Si $\varepsilon \geq \min\{d_1, d_2\}$ alors, en vertu de ce qui précède, il existe $\varepsilon' \in ]0, \min\{d_1, d_2\}[$ tel que $A \cap ]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[ \neq \emptyset$. Comme $]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[ \subset ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ il vient $\cap ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \neq \emptyset$.

Ainsi $\forall \varepsilon > 0,\ A \cap ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[ \neq \emptyset$.

**5.** Il résulte de la question précédente que $]\frac{1}{2}, 1[ \subset \overline{A}$.

En outre $\frac{1}{2} \in \overline{A}$ puisque la suite $(u_p)$ définie par $u_p = \frac{p+1}{2p+2}$ est une suite d'éléments de $A$ qui converge vers $\frac{1}{2}$.

D'autre part $1 \in \overline{A}$ puisque la suite $(u_q)$ définie par $u_p = \frac{q+1}{q+3}$ est une suite d'éléments de $A$ qui converge vers 1.

Donc $[\frac{1}{2}, 1] \subset \overline{A}$. La question 1 permet de conclure que $\overline{A} = [\frac{1}{2}, 1]$.