Pôle Universitaire Léonard de Vinci S2 – Année 2003-2004
CS 103 – Analyse I Promotion ESILV 2008

Devoir 3

corrigé

Exercice I

1. Pour tout $n \geq 1$ entier, on a

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} & \text{(définition)} \\ u_n = u_n & \text{(trivial)} \end{cases}$$

donc

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

Posons donc

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

il vient $X_{n+1} = AX_n$.

2. Soit $(\mathcal{P}_n)$ la proposition $X_n = A^{n-1}X_1$.

- On a $A^0 = I$ donc $(\mathcal{P}_1)$ est vraie.
- Supposons $X_n = A^{n-1}X_1$. On a $X_{n+1} = AX_n$ donc $X_{n+1} = AA^{n-1}X_1$ par suite on a $X_{n+1} = A^{(n+1)-1}X_1$ donc $(\mathcal{P}_{n+1})$ est vraie.

On a établit que $X_n = A^{n-1}X_1$ pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice II

1. Le déterminant de P est

$$\det P = r_1 - r_2 = -\sqrt{a^2 + 4b} \neq 0$$

par suite P est inversible. On a

$$P^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} & \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} \\ \frac{1}{\sqrt{a^2+4b}} & -\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} & -\frac{b}{\sqrt{a^2+4b}} \\ \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2\sqrt{a^2+4b}} & \frac{b}{\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{a^2-a\sqrt{a^2+4b}+4b}{2\sqrt{a^2+4b}} & 0 \\ 0 & \frac{a^2+a\sqrt{a^2+4b}+4b}{2\sqrt{a^2+4b}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

2. Il résulte de la question précédente que $A = PDP^{-1}$. Soit $n \geq 1$ un entier, on a

$$A^{n-1} = (PDP^{-1})^{n-1} = PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots PDP^{-1}$$

Comme $P^{-1}P = I$, il vient $A^{n-1} = PD^{n-1}P^{-1}$. La question 2 de l'exercice I permet de conclure que $X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$.

3. Une récurrence immédiate donne

$$D^{n-1} = \begin{bmatrix} r_1^{n-1} & 0 \\ 0 & r_2^{n-1} \end{bmatrix}$$

donc

$$PD^{n-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{{r_1}^n - {r_2}^n}{r_1 - r_2} & \frac{-{r_1}^n r_2 + {r_2}^n r_1}{r_1 - r_2} \\ \frac{{r_1}^{n-1} - {r_2}^{n-1}}{r_1 - r_2} & \frac{-{r_1}^{n-1} r_2 + {r_2}^{n-1} r_1}{r_1 - r_2} \end{bmatrix}$$

or

$$X_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_0 \end{bmatrix}$$

donc

$$PD^{n-1}P^{-1}X_1 = \begin{bmatrix} \frac{u_1 {r_1}^n - u_1 {r_2}^n - u_0 {r_1}^n r_2 + u_0 {r_2}^n r_1}{r_1 - r_2} \\ \frac{u_1 {r_1}^{n-1} - u_1 {r_2}^{n-1} - u_0 {r_1}^{n-1} r_2 + u_0 {r_2}^{n-1} r_1}{r_1 - r_2} \end{bmatrix}$$

par suite

$$\begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1 = \begin{bmatrix} \frac{u_1 {r_1}^n - u_1 {r_2}^n - u_0 {r_1}^n r_2 + u_0 {r_2}^n r_1}{r_1 - r_2} \\ \frac{u_1 {r_1}^{n-1} - u_1 {r_2}^{n-1} - u_0 {r_1}^{n-1} r_2 + u_0 {r_2}^{n-1} r_1}{r_1 - r_2} \end{bmatrix}$$

donc

$$u_n = \frac{u_1 r_1^n - u_1 r_2^n - u_0 r_1^n r_2 + u_0 r_2^n r_1}{r_1 - r_2}$$

d'où

$$u_n = \frac{u_1 - u_0 r_2}{r_1 - r_2} r_1^n + \frac{-u_1 + u_0 r_1}{r_1 - r_2} r_2^n$$

finalement

$$u_n = \frac{-u_1 + u_0 \frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2}}{\sqrt{a^2+4b}} \left(\frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^n + \frac{u_1 - u_0 \frac{a - \sqrt{a^2+4b}}{2}}{\sqrt{a^2+4b}} \left(\frac{a + \sqrt{a^2+4b}}{2} \right)^n$$

Exercice III

1. Considérons

$$r_1 = \frac{a - i\sqrt{|a^2+4b|}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{a + i\sqrt{|a^2+4b|}}{2}$$

De manière analogue à l'exercice I on obtient

$$u_n = \frac{-u_1 + u_0 \frac{a + i\sqrt{|a^2+4b|}}{2}}{i\sqrt{|a^2+4b|}} \left(\frac{a - i\sqrt{|a^2+4b|}}{2} \right)^n + \frac{u_1 - u_0 \frac{a - i\sqrt{|a^2+4b|}}{2}}{i\sqrt{|a^2+4b|}} \left(\frac{a + i\sqrt{|a^2+4b|}}{2} \right)^n$$

ce qui équivaut à

$$u_n = \frac{u_1 i + u_0 \frac{-ai + \sqrt{|a^2+4b|}}{2}}{\sqrt{|a^2+4b|}} \left(\frac{a - i\sqrt{|a^2+4b|}}{2} \right)^n + \frac{-u_1 i + u_0 \frac{ai + \sqrt{|a^2+4b|}}{2}}{\sqrt{|a^2+4b|}} \left(\frac{a + i\sqrt{|a^2+4b|}}{2} \right)^n$$

2. Notons respectivement ρ et θ le module et l'argument du nombre complexe r_2. On a $r_2 = \rho e^{i\theta}$ et comme r_1 est le conjugué de r_2 on a $r_1 = \rho e^{-i\theta}$. L'expression de u_n devient

$$u_n = \frac{u_1 i + u_0 \frac{-ai+\sqrt{|a^2+4b|}}{2}}{\sqrt{|a^2+4b|}} \rho^n e^{-in\theta} + \frac{-u_1 i + u_0 \frac{ai+\sqrt{|a^2+4b|}}{2}}{\sqrt{|a^2+4b|}} \rho^n e^{in\theta}$$

En utilisant la formule d'Euler $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, il vient

$$u_n = \frac{u_1 i + u_0 \frac{-ai+\sqrt{|a^2+4b|}}{2}}{\sqrt{|a^2+4b|}} \rho^n (\cos(n\theta) - i\sin(n\theta)) + \frac{-u_1 i + u_0 \frac{ai+\sqrt{|a^2+4b|}}{2}}{\sqrt{|a^2+4b|}} \rho^n (\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

En outre (u_n) est une suite numérique réelle donc le nombre complexe dans le membre de droite de l'équation précédente a une partie imaginaire nulle (ce que l'on peut vérifiier par le calcul). Ainsi u_n est égal à la partie réelle du membre de droite de cette équation. On obtient

$$u_n = \frac{u_1 \sin(n\theta) + u_0 \frac{a\sin(n\theta)+\sqrt{|a^2+4b|}\cos(n\theta)}{2}}{\sqrt{|a^2+4b|}} \rho^n + \frac{u_1 \sin(n\theta) + u_0 \frac{-a\sin(n\theta)+\sqrt{|a^2+4b|}\cos(n\theta)}{2}}{\sqrt{|a^2+4b|}} \rho^n$$

Comme $\rho^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{\sqrt{|a^2+4b|}^2}{4} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} - b = -b$, il vient

$$u_n = (-b)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2u_1}{\sqrt{|a^2+4b|}} \sin(n\theta) - \frac{u_0 a}{\sqrt{|a^2+4b|}} \sin(n\theta) + u_0 \cos(n\theta) \right)$$

Exercice IV

1. Le déterminant de P est $\det P = r - (1+r) = -1$ donc P est inversible. On a

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1+r \\ 1 & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1+\frac{a}{2} \\ 1 & -\frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1}A = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2}+1 & -b \\ \frac{a}{2} & b \end{bmatrix}$$

donc

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -\frac{a^2}{4}+\frac{a}{2}-b & -\frac{a^2}{4}+1-b \\ \frac{a^2}{4}+b & \frac{a}{2}+\frac{a^2}{4}+b \end{bmatrix}$$

or $a^2 = -4b$ donc

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix} = T$$

2. Il résulte de la question précédente que $A = PTP^{-1}$. Soit $n \geq 1$ un entier, on a

$$A^{n-1} = (PTP^{-1})^{n-1} = PTP^{-1}PTP^{-1} \dots PTP^{-1}$$

Comme $P^{-1}P = I$, il vient $A^{n-1} = PT^{n-1}P^{-1}$. La question 2 de l'exercice I permet de conclure que $X_n = PT^{n-1}P^{-1}X_1$.

3. Le calcul des premières puissances de T laisse supposer que

$$T^N = \begin{bmatrix} r^N & Nr^{N-1} \\ 0 & r^N \end{bmatrix}$$

Notons $\mathcal{P}_N$ cette assertion et provons-la par récurrence

- Lorsque $N = 0$ on a $T^0 = I$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- Supposons $\mathcal{P}_N$ alors

  $$T^N = \begin{bmatrix} r^N & Nr^{N-1} \\ 0 & r^N \end{bmatrix}$$

  donc

  $$T^{N+1} = \begin{bmatrix} r^N & Nr^{N-1} \\ 0 & r^N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{N+1} & N+1r^{(N+1)-1} \\ 0 & r^{N+1} \end{bmatrix}$$

  donc $\mathcal{P}_{N+1}$ est vraie.

Cette ŕecurrence établit que pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a

$$T^N = \begin{bmatrix} r^N & Nr^{N-1} \\ 0 & r^N \end{bmatrix}$$

4. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$T^{n-1} = \begin{bmatrix} r^{n-1} & (n-1)r^{n-2} \\ 0 & r^{n-1} \end{bmatrix}$$

ainsi

$$PT^{n-1}P^{-1} = \begin{bmatrix} r^{n-1}n & r^n(1-n) \\ (n-1)r^{n-2} & (2-n)r^{n-1}n \end{bmatrix}$$

La première composante de $PT^{n-1}P^{-1}X_1$ est alors

$$u_1 r^{n-1} n + u_0 r^n - u_0 r^n n$$

Donc

$$u_n = u_0 r^n + n(u_1 - u_0 r) r^{n-1}$$

Remarque

On remarque que l'espace des suites satisfaisant la récurrence $u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}$ forme un espace vectoriel de dimension 2. Les résultats de ce devoir peuvent se résumer de la manière suivante. Considérons le polynôme $X^2 - aX - b = 0$ et $\Delta = a^2 + 4b$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, soit r_1 et r_2 les deux racines du polynôme et k_1, k_2 les réels donnés par le système

  $$\begin{cases} k_1 + k_2 = u_0 \\ k_1 r_1 + k_2 r_2 = u_1 \end{cases}$$

  alors $u_n = k_1 r_1^t + k_2 r_2^t$

- Si $\Delta = 0$, soit r la racine du polynôme et k_1, k_2 les réels donnés par le système

$$\begin{cases} k_1 = u_0 \\ r\,(k_1 + k_2) = u_1 \end{cases}$$

alors $X_n = k_1 r^t + t k_2 r^t$

- Si $\Delta < 0$ soit $\rho e^{i\theta}$ et $\rho e^{-i\theta}$ les deux racines conjuguées du polynôme, soit k_1 et k_2 les réels donnés par

$$\begin{cases} k_1 = u_0 \\ \rho(k_1 \cos(\theta) + k_2 \sin(\theta)) = u_1 \end{cases}$$

alors $u_n = k_1 \rho^t \cos(t\theta) + k_2 \rho^t \sin(t\theta)$