Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S2 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2008

Devoir 3

A rendre le 5/03/2004

Soit a et b deux réels. On suppose que u_0 et u_1 sont donnés et on considère la relation de récurrence

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1} \tag{1}$$

Le but de ce devoir est de déterminer le terme général de (u_n) c'est-à-dire une expression de u_n ne faisant intervenir que a, b, u_0, u_1 et n.

Exercice I

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$X_n = \begin{bmatrix} u_n \\ u_{n-1} \end{bmatrix}$$

1. Déterminer une matrice A, indépendante de n, telle que $X_{n+1} = AX_n$.

2. Montrer que $X_n = A^{n-1}X_1$.

Exercice II

Dans cet exercice on suppose que $a^2 + 4b > 0$ et on note

$$r_1 = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4b}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4b}}{2}$$

1. Notons

$$P = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}$$

Montrer que P est inversible et que $P^{-1}AP = D$.

2. En déduire que $X_n = PD^{n-1}P^{-1}X_1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Déterminer le terme général de (u_n).

Exercice III

Dans cet exercice on suppose que $a^2 + 4b < 0$.

1. Adapter la méthode de l'exercice II et déterminer le terme général de (u_n).

2. Donner une expression du terme général de (u_n), ne faisant intervenir que des réels. On pourra faire intervenir l'argument d'un nombre complexe convenablement choisi.

Exercice IV

Dans cet exercice on suppose que $a^2 + 4b = 0$ et on note $r = \frac{a}{2}$.

1. Notons

$$P = \begin{bmatrix} r & 1+r \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{bmatrix} r & 1 \\ 0 & r \end{bmatrix}$$

Montrer que P est inversible et que $P^{-1}AP = T$.

2. En déduire que $X_n = PT^{n-1}P^{-1}X_1$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Calculer T^N pour $N \in \mathbb{N}$.

4. En déduire le terme général de (u_n).