Devoir 2

corrigé

Exercice I

1. Soit (P_n) la proposition

$$u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$$

alors

- (P_N) est vraie
- Supposons (P_N) vraie, on a $u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$, mais on à aussi $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$ donc

$$u_n \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{u_N}{v_N} v_n \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

ce qui entraine $u_{n+1} \leq \frac{u_N}{v_N} v_{n+1}$, ainsi (P_{n+1}) est vérifiée.

2. Le réel $C = \frac{u_N}{v_N}$ est indépendant de n, les suites (u_n) et (v_n) sont à termes positifs et $u_n \leq C v_n$ donc le théorème de comparaison s'applique et donne

- Si la série de terme général (v_n) converge alors la série de terme général (u_n) converge également.
- Si la série de terme général (u_n) diverge alors la série de terme général (v_n) diverge également.

Exercice II

1. Soit f définie par $f(x) = (1+x)^{-s}$, cette fonction est dérivable et $f'(x) = -s(1+x)^{-s-1}$, ainsi

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-s} = f(1/n)$$

Or $f'(0) = -s$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(1/n) - f(0)}{\frac{1}{n}} = -s$$

par suite

$$\lim \frac{\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1}{-\frac{s}{n}} = 1$$

donc $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 \sim -\frac{s}{n}$ ce qui entraine que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 + \frac{s}{n} \in \mathrm{o}(\frac{s}{n})$$

or $\mathrm{o}(\frac{s}{n}) \subset \mathrm{o}(\frac{1}{n})$ (et on a égalité si $s \neq 0$) donc, il existe (ε_n) dans $\mathrm{o}(\frac{1}{n})$ tel que $\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 + \frac{s}{n} = \varepsilon_n$. Il en résulte :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{s}{n} + \varepsilon_n \tag{1}$$

2. Remarquons que $1 < s < r < a$ donc $r - s > 0$ et $a - r > 0$.

a. On a (ε_n) dans $\mathrm{o}(\frac{1}{n})$ donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |\varepsilon_n| \leq \varepsilon \left|\frac{1}{n}\right|$$

en particulier, pour $\varepsilon = r - s$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1$ entraine $|\varepsilon_n| \leq (r-s)|\frac{1}{n}|$. Par suite $\varepsilon_n \geq (s-r)\frac{1}{n}$, l'équation (1) donne alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 - \frac{s}{n} + (s-r)\frac{1}{n}$. Ainsi

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n > N_1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 - \frac{r}{n} \tag{2}$$

b. La suite (α_n) converge vers a donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |\alpha_n - a| \leq \varepsilon$$

en particulier, pour $\varepsilon = a - r$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2$ entraine $|\alpha_n - a| \leq a - r$. Donc $r - a \leq \alpha_n - a$, donc $-\alpha_n \leq -r$, il s'en suit que $1 - \frac{\alpha_n}{n} \leq 1 - \frac{r}{n}$. Ainsi

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ n > N_2 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{r}{n} \tag{3}$$

c. Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Les propositions (2) et (3) impliquent que lorsque $n \geq N$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

or la série de terme général (v_n) converge puisqu'il s'agit d'une série de Riemann avec $s > 1$, en vertu de l'exercice I on conclut que la série de terme général (u_n) converge également.

3. Soit $s \in]a, 1[$ et (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{n^s}$. Posons $r = \frac{s+a}{2}$. Remarquons que $a < r < s < 1$ donc $s - r > 0$ et $r - a > 0$.

Soit $\varepsilon = s - r$. Comme (ε_n) dans $\mathrm{o}(\frac{1}{n})$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_1$ entraine $|\varepsilon_n| \leq (s-r)|\frac{1}{n}|$. Par suite $\varepsilon_n \leq (s-r)\frac{1}{n}$, l'équation (1) donne alors $\frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1 - \frac{s}{n} + (s-r)\frac{1}{n}$. Ainsi

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n > N_1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1 - \frac{r}{n} \tag{4}$$

La suite (α_n) converge vers a donc pour $\varepsilon = r - a$, il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2$ entraine $|\alpha_n - a| \leq r - a$. Donc $\alpha_n - a \leq r - a$, donc $-\alpha_n \geq -r$, il s'en suit que $1 - \frac{\alpha_n}{n} \geq 1 - \frac{r}{n}$. Ainsi

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ n > N_2 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1 - \frac{r}{n} \tag{5}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Les propositions (2) et (3) impliquent que lorsque $n \geq N$ on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

or la série de terme général (v_n) diverge puisqu'il s'agit d'une série de Riemann avec $s < 1$, en vertu de l'exercice I on conclut que la série de terme général (u_n) diverge également.

Exercice III

1. Soit $\alpha_n = a - n\varepsilon_n$. Comme $(\varepsilon_n) \in \mathrm{o}(\frac{1}{n})$ on a $\lim \alpha_n = a$ et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

en vertu de l'exerice précédent, la série de terme général (u_n) converge lorsque $a > 1$ et diverge lorsque $a < 1$.

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n-1}$ pour $n \geq 1$ vérifie

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

Ainsi $a = 1$. En outre la série de terme général (u_n) diverge.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n \ln n}$ pour $n \geq 2$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)}$$

En outre

$$\frac{\frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)} - 1 + \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n \ln n}} = -\frac{n \ln n}{(n+1)\ln(n+1)}\left(n \ln n - (n+1)\ln(n+1) + \left(1 + \frac{1}{n}\right)\ln(n+1)\right)$$

Donc

$$\frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n \ln n}} = -\frac{n}{n+1}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}\left(\frac{\ln(1-\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} + \frac{\ln(n+1)}{n}\right)$$

En calculant la limite de chacun des facteurs, on obtient

$$\lim \frac{\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n}}{-\frac{1}{n \ln n}} = 1$$

par suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln n} \in \mathrm{o}(\frac{1}{n \ln n})$ donc il existe une suite (e_n) dans $\mathrm{o}(\frac{1}{n \ln n})$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + e_n$$

donc il existe (ε_n) dans $\mathrm{o}(\frac{1}{n})$ telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} + \varepsilon_n$$

On remarque que dans ce cas $a = 1$ et que la série de terme général (u_n) converge.

3. Posons

$$u_n = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}$$

alors

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1.3.5...(2n-1)(2n+1)}{2.4.6...(2n+2)(2n+4)}}{\frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...(2n+2)}} \\
&= \frac{2n+1}{2n+4} \\
&= 1 + \frac{-3}{2n+4} \\
&= 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{n}\frac{2n}{2n+4} \\
&= 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{n}\left(1 - \frac{4}{2n+4}\right) \\
&= 1 - \frac{3}{2}\frac{1}{n} - \frac{3}{n(n+2)} \\
&= 1 - \frac{3}{2} + \varepsilon_n
\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_n \in \mathrm{o}(\frac{1}{n})$. Ici $a = \frac{3}{2} > 1$ donc la série de terme général (u_n) converge.