Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S1 – Année 2003-2004
CS 103 – Analyse I — Promotion ESILV 2008

Devoir 2

A rendre le 23/01/2004

Exercice I

Soit (u_n) et (v_n) deux suites à termes strictement positifs telles que

$$\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow\ u_n \leq \frac{u_N}{v_N} v_n$

2. En déduire que

- Si la série de terme général (v_n) converge alors la série de terme général (u_n) converge également.
- Si la série de terme général (u_n) diverge alors la série de terme général (v_n) diverge également.

Exercice II

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha_n}{n}$$

où (α_n) est une suite convergente et $a = \lim \alpha_n$.

1. Soit $s \in \mathbb{R}$ et (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{n^s}$. Montrer que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{s}{n} + \varepsilon_n$$

où la suite (ε_n) appartient à $o(\frac{1}{n})$.

2. Supposons $a > 1$. Soit $s \in]1, a[$ et (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{1}{n^s}$. Posons $r = \frac{s+a}{2}$.

a. Montrer que

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n > N_1 \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} \geq 1 - \frac{r}{n}$$

b. Montrer que

$$\exists N_2 \in \mathbb{N},\ n > N_2 \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 - \frac{r}{n}$$

c. En déduire que la série de terme général (u_n) converge.

3. Supposons $a < 1$. Montrer que la série de terme général (u_n) diverge.

Exercice III

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ vérifiant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{a}{n} + \varepsilon_n$$

où la suite (ε_n) appartient à $\mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

1. Montrer que si $a < 1$ alors la série de terme général (u_n) diverge, et que si $a > 1$ alors elle converge.

2. Dans le cas $a = 1$ donner des exemples où la série converge et d'autres où elle diverge.

3. Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}$$