Devoir 1

corrigé

Exercice I

1. La suite (u_n) est dans $\mathrm{o}(0)$ équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon \times 0$$

ce qui équivaut à $\exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n = 0$, c'est-à-dire à la suite est constante égale à 0, à partir d'un certain rang.

2. La suite (u_n) est dans $\mathrm{o}(1)$ équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon$$

ce qui est la définition de $\lim u_n = 0$.

3. Montrons que $\mathrm{o}(\frac{1}{n+1}) \subset \mathrm{o}(\frac{1}{n})$. Soit (u_n) dans $\mathrm{o}(\frac{1}{n+1})$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$$

Comme $\frac{\varepsilon}{n+1} \leq \frac{\varepsilon}{n}$ il vient

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

par suite (u_n) appartient à $\mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

Réciproquement, montrons $\mathrm{o}(\frac{1}{n}) \subset \mathrm{o}(\frac{1}{n+1})$. Soit (u_n) dans $\mathrm{o}(\frac{1}{n})$ alors

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon'}{n}$$

or $\frac{\varepsilon}{n} \leq 2\frac{\varepsilon}{n+1}$ donc

$$\forall \varepsilon' > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \frac{2\varepsilon'}{n+1} \tag{1}$$

Soit $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$. Selon (1), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine $|u_n| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$, ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}$$

donc (u_n) appartient à $\mathrm{o}(\frac{1}{n+1})$.

4. Montrons le sens direct. Soit (u_n) dans $\mathrm{o}(v_n)$, et soit $\varepsilon > 0$ alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Soit $N_2 \in N$ le rang à partir du quel (v_n) est non nulle, posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Il vient

$$n \geq N \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon$$

ainsi $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$.

Réciproquement, supposons $\lim \frac{u_n}{v_n} = 0$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left|\frac{u_n}{v_n}\right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

donc $(u_n) \in \mathrm{o}(v_n)$.

5. Les suites (n^α) et (n^β) ne s'annullent pas dès que $n \geq 1$, le résultat de la question précédente s'applique donc.

$$(u_n) \in \mathrm{o}(v_n) \iff \lim \frac{n^\alpha}{n^\beta} = 0 \iff \alpha < \beta$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est $\alpha < \beta$.

Exercice II

1. Montrons que la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

Réflexivité : soit (u_n) une suite alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - u_n| \leq \varepsilon |u_n|$$

donc $(u_n) \sim (u_n)$.

Symétrie : soit (u_n) et (v_n) telles que $(u_n) \sim (v_n)$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n| \tag{2}$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_1$ entraine $|u_n - v_n| \leq \frac{1}{2}|v_n|$. Or

$$|v_n| - |u_n| \leq ||v_n| - |u_n|| \leq |v_n - u_n| = |u_n - v_n|$$

donc $|v_n| - |u_n| \leq \frac{1}{2}|v_n|$. Par suite $|v_n| \leq 2|u_n|$.

Soit $\varepsilon' > 0$, l'assertion (2) donne $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N_2$ entraine $|v_n - u_n| \leq \varepsilon'|v_n|$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors pour $n \geq N$ on a

$$|v_n - u_n| \leq 2\varepsilon'|u_n|$$

Soit à présent $\varepsilon > 0$, posons $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$. On a montré qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine $|v_n - u_n| \leq 2\varepsilon'|u_n|$, ainsi

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N, |v_n - u_n| \leq \varepsilon |u_n|$$

donc $(v_n - u_n) \in \mathrm{o}(u_n)$. Par suite $(v_n) \sim (u_n)$.

Transitivité : soit (u_n), (v_n) et (w_n) telles que

$$(u_n) \sim (v_n) \tag{3}$$
$$(v_n) \sim (w_n) \tag{4}$$

On a

$$|u_n - w_n| = |(u_n - v_n) + (v_n - w_n)| \leq |u_n - v_n| + |v_n - w_n| \tag{5}$$

Soit $\varepsilon_1 > 0$. En vertu de (3), il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_1$ implique $|u_n - v_n| \leq \varepsilon_1 |v_n|$ ainsi l'équation (5) donne

$$|u_n - w_n| \leq \varepsilon_1 |v_n| + |v_n - w_n| \tag{6}$$

Or $|v_n| = |(v_n - w_n) + w_n| \leq |v_n - w_n| + |w_n|$ ainsi (6) donne

$$|u_n - w_n| \leq (1 + \varepsilon_1)|v_n - w_n| + \varepsilon_1 |w_n| \tag{7}$$

Soit $\varepsilon_2 > 0$. En vertu de (4), il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_2$ implique

$$|v_n - w_n| \leq \varepsilon_2 |w_n|$$

donc (7) donne

$$|u_n - w_n| \leq ((1 + \varepsilon_1)\varepsilon_2 + \varepsilon_1)\,|w_n| \tag{8}$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in]0, +\infty[^2$ tel que $(1+\varepsilon_1)\varepsilon_2 + \varepsilon_1 \leq \varepsilon$. Il suffit, par exemple, de prendre $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \sqrt{1+\varepsilon} - 1$ et il vient

$$(1 + \varepsilon_1)\varepsilon_2 + \varepsilon_1 = \sqrt{1+\varepsilon}(\sqrt{1+\varepsilon} - 1) + \sqrt{1+\varepsilon} - 1 = 1 + \varepsilon - 1 = \varepsilon$$

L'équation (8) donne alors

$$|u_n - w_n| \leq \varepsilon |w_n|$$

il s'en suit que $(u_n - w_n) \in \mathrm{o}(w_n)$ et donc $(u_n) \sim (w_n)$.

2. Montrons le sens direct. Soit (u_n) une suite équivalente à (v_n), et soit $\varepsilon > 0$ alors

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

Soit $N_2 \in \mathbb{N}$ le rang à partir du quel (v_n) est non nulle, posons $N = \max\{N_1, N_2\}$. Il vient

$$n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

ainsi $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Réciproquement, supposons $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow \left| \frac{u_n}{v_n} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

donc

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n - v_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

donc $(u_n - v_n) \in \mathrm{o}(v_n)$ et par suite $(u_n) \sim (v_n)$.

3. Les suites (n^α) et (n^β) ne s'annullent pas dès que $n \geq 1$, le résultat de la question précédente s'applique donc.

$$(u_n) \sim (v_n) \iff \lim \frac{n^\alpha}{n^\beta} = 1 \iff \alpha = \beta$$

La condition nécessaire et suffisante cherchée est $\alpha = \beta$.

4. Les polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ ont un nombre fini de racines réelles (ces nombre sont respectivement majorés par p et q). Soit ρ la plus grande des racines de $P(X)$ et $Q(X)$. Notons $N_1 = \mathrm{E}(\rho) + 1$. La suite (u_n) est bien définie et non nulle à partir du rang N_1.

$$\frac{u_n}{\frac{a}{b} n^{p-q}} = \frac{\frac{n^p(a+A_n)}{n^q(b+B_n)}}{\frac{a}{b} n^{p-q}}$$

où (A_n) et (B_n) sont des suites bornées qui tendent vers 0. Il en résulte que $\lim \frac{u_n}{\frac{a}{b} n^{p-q}} = 1$ donc $(u_n) \sim (\frac{a}{b} n^{p-q})$.

5. Comme $(u_n) \sim (v_n)$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

En particulier pour $\varepsilon = 1.001$ il existe un rang N_1 tel que $n \geq N_1$ entraine

$$|u_n| \leq 1.001|v_n| \tag{9}$$

Comme $(v_n) \sim (u_n)$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |v_n| \leq \varepsilon |u_n|$$

En particulier pour $\varepsilon = \frac{1}{0.999}$ il existe un rang N_2 tel que $n \geq N_2$ entraine $|v_n| \leq \frac{1}{0.999}|u_n|$, ainsi

$$0.999|v_n| \leq |u_n| \tag{10}$$

Soit $N = \max\{N_1, N_2\}$. Si (u_n) et (v_n) sont positives alors (9) et (10) donnent

$$0.999 v_n \leq u_n \leq 1.001 v_n$$

Exercice III

1.

a. OUI. Démonstration : on a $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc $\lim \frac{u_n w_n}{v_n w_n} = 1$ donc $(u_n w_n) \sim (v_n w_n)$.

b. NON. Contre-exemple : soit les suites

$$u_n = -n^3 + n^2, \quad v_n = -n^3 + n, \quad w_n = n^3$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes puisqu'elles ne s'annullent pas lorsque $n \geq 1$ et que leur rapport tend vers 1. En revanche $u_n + w_n = n^2$ et $v_n + w_n = n$ ne s'annullent pas lorsque $n \geq 1$ et leur rapport ne tend pas vers 1, elles ne sont donc pas équivalentes.

2.

a. OUI. Démonstration : $\ln u_n - \ln v_n = \ln \frac{u_n}{v_n}$ or $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc $\lim(\ln u_n - \ln v_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, la définition de la limite donne

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |\ln u_n - \ln v_n| \leq \varepsilon$$

Comme $\lim u_n = +\infty$ on a $\lim \ln u_n = +\infty$ ainsi il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_2$ entraine $|\ln u_n| \geq 1$. Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$ alors

$$n \geq N \Rightarrow |\ln u_n - \ln v_n| \leq \varepsilon |\ln u_n|$$

il en résulte que $(\ln u_n - \ln v_n) \in \mathrm{o}(\ln u_n)$ donc

$$(\ln u_n -) \sim \mathrm{o}(\ln v_n)$$

b. OUI. Démonstration : $\ln u_n - \ln v_n = \ln \frac{u_n}{v_n}$ or $\lim \frac{u_n}{v_n} = 1$ donc $\lim(\ln u_n - \ln v_n) = 0$. Soit $\varepsilon > 0$, la définition de la limite donne

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |\ln u_n - \ln v_n| \leq \varepsilon \tag{11}$$

Comme $\lim u_n = l$ on a $\lim \ln u_n = \ln l$ avec $\ln l \in \mathbb{R}^*$ puisque $l \neq 1$. Ainsi de manière analogue à la question 3 de l'exercice I et à la démonstration de la symétrie dans la question 1 de l'exercice II, l'assertion (11) est équivalente à

$$\exists N_1 \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Rightarrow |\ln u_n - \ln v_n| \leq \frac{1}{2}|\ln l|\varepsilon \tag{12}$$

- Supposons $\ln l > 0$. Il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_2$ entraine $|\ln u_n - \ln l| \leq \frac{\ln l}{2}$ ce qui entraine $|\ln u_n| \geq \frac{1}{2}\ln l$ donc $|\ln u_n| \geq \frac{1}{2}|\ln l|$.
- Supposons $\ln l < 0$. Il existe un rang $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $n > N_2$ entraine $|\ln u_n - \ln l| \leq \frac{-\ln l}{2}$ ce qui entraine $|\ln u_n| \geq \frac{1}{2}|\ln l|$.

Posons $N = \max\{N_1, N_2\}$, alors (12) donne

$$n \geq N_1 \Rightarrow |\ln u_n - \ln v_n| \leq \varepsilon |\ln u_n|$$

il en résulte que $(\ln u_n) \sim (\ln v_n)$

c. NON. Contre-exemple : soit les suites

$$u_n = 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{et} \quad v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes puisqu'elles ne s'annullent pas lorsque $n \geq 1$ et que leur rapport tend vers 1. Considérons le quotient des logarithmes :

$$\frac{\ln u_n}{\ln v_n} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}$$

Notons $f(u) = \ln(1+u)$, on a

$$\lim \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = f'(0) = 1$$

$$\lim \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = f'(0) = 1$$

$$\lim \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = +\infty$$

par suite

$$\lim \frac{\ln u_n}{\ln v_n} = +\infty$$

les deux suites $(\ln u_n)$ et $(\ln v_n)$ ne s'annullent pas lorsque $n \geq 2$ et leur rapport ne tend pas vers 1, les deux suites $(\ln u_n)$ et $(\ln v_n)$ ne sont donc pas équivalentes.

3. NON. Contre-exemple : soit les suites

$$u_n = n + 1, \quad \text{et} \quad v_n = n$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes puisqu'elles ne s'annullent pas lorsque $n \geq 1$ et que leur rapport tend vers 1. Pourtant

$$\frac{\exp u_n}{\exp v_n} = e^{n+1-n} = e$$

les deux suites $(\exp u_n)$ et $(\exp v_n)$ ne s'annullent pas lorsque $n \geq 0$ et leur rapport ne tend pas vers 1, les deux suites $(\exp u_n)$ et $(\exp v_n)$ ne sont donc pas équivalentes.