Devoir 1

A rendre le 9/12/2003

Exercice I

On appelle ensemble des suites négligeables devant (v_n) et on note $\mathrm{o}(v_n)$, l'ensemble des suites (u_n) vérifiant

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow |u_n| \leq \varepsilon |v_n|$$

1. Montrer que $\mathrm{o}(0)$ est l'ensemble des suites constantes égales à 0, à partir d'un certain rang.

2. Montrer que $\mathrm{o}(1)$ est l'ensemble des suites qui convergent vers 0.

3. Montrer que $\mathrm{o}(\frac{1}{n+1}) = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$.

4. Soit (u_n) et (v_n) deux suites non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que

$$(u_n) \in \mathrm{o}(v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$$

5. Soit α et β deux réels, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(n^\alpha) \in \mathrm{o}(n^\beta)$.

Exercice II

Soit (u_n) et (v_n) deux suites. On dit que (u_n) est équivalente à (v_n) et on note $(u_n) \sim (v_n)$ lorsque

$$(u_n - v_n) \in \mathrm{o}(v_n)$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des suites.

2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites non nulles à partir d'un certain rang. Montrer que

$$(u_n) \sim (v_n) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

3. Soit α et β deux réels, donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(n^\alpha) \sim (n^\beta)$.

4. Soit $P(X)$ et $Q(X)$ sont deux polynômes dont les termes de plus haut degré sont respectivement aX^p et bX^q. Soit

$$F(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

une fraction rationnelle. Considérons (u_n) la suite définie par $u_n = F(n)$. Montrer que

$$(u_n) \sim \left(\frac{a}{b} n^{p-q}\right)$$

5. Soit (u_n) et (v_n) deux suites positives équivalentes. Montrer qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraine

$$0.999 v_n \leq u_n \leq 1.001 v_n$$

Exercice III

Dans cet exercice, on suppose les suites non nulles à partir d'un certain rang.

1. Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. Les deux premières sont supposées équivalentes.

a. A-t-on $(u_n w_n) \sim (v_n w_n)$?

b. A-t-on $(u_n + w_n) \sim (v_n + w_n)$?

2. Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. A-t-on $(\ln |u_n|) \sim (\ln |v_n|)$ dans les cas suivants :

a. Lorsque $\lim u_n = +\infty$.

b. Lorsque $\lim u_n = l \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$.

c. Lorsque $\lim u_n = 1$.

3. Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes. A-t-on $(\exp u_n) \sim (\exp v_n)$?