

Feuille d'exercices 9

Compacité

Exercice I

Pour chacun des ensembles A suivants, et des recouvrements $(\Omega_i)_{i \in I}$ dites s'il est possible d'extraire un sous-recouvrement fini. Comparez avec le théorème de Borel-Lebesgue.

1. $A =]0, 1[$, $\Omega_i =]\frac{1}{i}, 1 - \frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$
2. $A = [0, 1]$, $\Omega_i =]-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}[$, $I = \mathbb{N}^*$
3. $A =]0, +\infty[$, $\Omega_i =]0, i[$, $I = \mathbb{N}^*$

Exercice II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sin(\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{n})$ et $A = \{u_n, n \in \mathbb{N}^*\}$.

1. L'ensemble A est-il fermé ? Est-il ouvert ? Est-il compact ?
2. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass¹ que peut-on dire des points d'accumulations de \overline{A} ?
3. Déterminer A' , A^* , \overline{A} , $\overset{\circ}{A}$ et ∂A .

Exercice III

1. Une suite d'éléments d'un ensemble sans point d'accumulation peut-elle être convergente ?
2. L'ensemble des termes d'une suite convergente admet-il toujours au moins un point d'accumulation ? Sinon quelle(s) condition(s) faut-il ajouter ? Si oui, est-ce que ce point d'accumulation est nécessairement la limite de la suite ?

¹Karl Weierstrass, mathématicien allemand, du XIXe siècle, est connu notamment pour sa construction de la théorie des fonctions complexes. Dans ses conférences de 1859-60 Weierstrass donne une introduction novante à l'analyse et en 1860-61, il traite du calcul intégral. Dans son cours de 1863-64 sur la théorie générale des fonctions analytiques, Weierstrass commence à formuler sa théorie des nombres réels. La notion de convergence uniforme que vous verrez en CS 201 est due à Weierstrass. Il a aussi contribué à la théorie des formes bilinéaires et quadratiques que vous verrez en CS 106.



Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815–1897)

Exercice IV

On considère l'ensemble

$$E = \left\{ \frac{(-1)^n}{n^2}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

1. Représenter graphiquement l'ensemble E
2. Toute suite d'éléments de E est-elle forcément convergente ?
3. Déterminer E^*
4. Démontrer que $E' \subset \{0\}$ puis en déduire E'
5. L'ensemble E est-il fermé ? Quelle est son adhérence ?
6. Peut-on trouver un recouvrement de E par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini ?
7. L'ensemble E est-il compact ? Peut-on déduire la réponse à cette question, de la réponse à la question précédente ?
8. L'ensemble E est-il ouvert ? Quel est son intérieur ?
9. Déterminer la frontière de E .

Exercice V

On considère

$$A = \left\{ \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

1. L'ensemble A est-il ouvert ?
2. L'ensemble A est-il fermé ?
3. Expliciter un recouvrement de A par des ouverts, dont on ne peut pas extraire un sous-recouvrement fini.
4. L'ensemble A est-il compact ?

Exercice VI

On considère la récurrence suivante $u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{4}u_n$.

1. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que $u_0 \in]-r, r[\Rightarrow \lim u_n = 0$.
2. Montrer que $r < \frac{3}{4}$.
3. Soit $u_0 \in]0, r[$, montrer que $u_n > 0$ et $\lim u_n = 0$.
4. Soit

$$A = \bigcap_{n=0}^{+\infty}]-u_n, u_n[$$

Montrer que $A = \{0\}$.