

## Correction des exercices de la feuille 8

*Exercices non corrigés en travaux dirigés*

### Exercice III

1. On a

$$\partial(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ$$

or on a vu que  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ , en outre  $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset (A \cup B)^\circ$  donc pour une partie  $E$  de  $\mathbb{R}$  on a  $E \setminus (A \cup B)^\circ \subset E \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})$ . En particulier pour  $E = \overline{A \cup B}$ , il vient

$$\begin{aligned} \partial(A \cup B) &\subset (\overline{A \cup B}) \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}) \\ &\subset (\overline{A} \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})) \cup (\overline{B} \setminus (\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B})) \\ &\subset (\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}) \cup (\overline{B} \setminus \overset{\circ}{B}) \\ &\subset (\partial A) \cup (\partial B) \end{aligned}$$

En revanche, l'inclusion réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple suivant :

$A$	$B$	$A \cup B$	$\partial A$	$\partial B$	$(\partial A) \cup (\partial B)$	$\partial(A \cup B)$	Conclusion
[1; 3]	[2; 4]	[1; 4]	{1; 3}	{2; 4}	{1; 2; 3; 4}	{1; 4}	$(\partial A) \cup (\partial B) \not\subset \partial(A \cup B)$

2. Dans le cas général, il n'y a ni inclusion dans un sens, ni d'en l'autre ; comme le montrent les contre-exemples suivants :

$A$	$B$	$A \cap B$	$\partial A$	$\partial B$	$(\partial A) \cap (\partial B)$	$\partial(A \cap B)$	Conclusion
$\mathbb{R}$	{1}	{1}	$\emptyset$	{1}	$\emptyset$	{1}	$\partial(A \cap B) \not\subset (\partial A) \cap (\partial B)$
$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$	$\emptyset$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\emptyset$	$(\partial A) \cap (\partial B) \not\subset \partial(A \cap B)$

### Exercice IV

1. Dans le cas général, il n'y a ni inclusion dans un sens, ni d'en l'autre ; comme le montrent les contre-exemples suivants :

$A$	$\overset{\circ}{A}$	$\partial A$	$\partial(\overset{\circ}{A})$	$(\partial \overset{\circ}{A})$	Conclusion
[1; 2]	]1; 2[	{1, 2}	{1, 2}	$\emptyset$	$\partial(\overset{\circ}{A}) \not\subset (\partial \overset{\circ}{A})$
$\mathbb{Q} \cap [1; 2]$	$\emptyset$	[1, 2]	$\emptyset$	{1; 2}	$(\partial \overset{\circ}{A}) \not\subset \partial(\overset{\circ}{A})$

2. Commençons par remarquer que l'adhérence de tout ensemble est un fermé. En effet pour  $E \subset \mathbb{R}$  on a  $\partial E = \overline{E} \setminus \overset{\circ}{E} = \overline{E} \cap (\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{E}) = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \overset{\circ}{E}}$  est l'intersection de deux fermés. En outre  $\partial \overline{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{\overline{A}}$ , or  $\overline{A} = \overline{A}$  et  $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$ , par suite  $\partial \overline{A} \subset \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A$  donc  $\partial(\overline{A}) \subset \partial A$ , mais  $\partial(\overline{A})$  est un fermé selon la remarque préliminaire, donc égal à son adhérence. Il en résulte que

$$\partial(\overline{A}) \subset \overline{\partial A}$$

En revanche, l'inclusion réciproque n'est pas vraie, comme le montre le contre-exemple suivant :

$A$	$\overline{A}$	$\partial A$	$\partial(\overline{A})$	$\overline{(\partial A)}$	Conclusion
$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}$	{0}	$\emptyset$	{0}	$(\partial A) \not\subset \partial(\overline{A})$

3. La réponse est non comme le montre  $A = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$ , on a alors  $\partial A = [0; 1]$  et  $\partial \partial A = \{1; 2\}$ .

## Exercice V

1. Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \overline{A}$  alors

$$\forall \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap A \neq \emptyset$$

En particulier pour  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ , on a

$$]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[ \cap A \neq \emptyset$$

donc  $x \in A^n$ .

2. Soit  $y \in A^n$  alors

$$]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[ \cap A \neq \emptyset$$

Soit alors  $x$  dans cette intersection, on a

$$y + \frac{1}{n} > x \quad \text{et} \quad y - \frac{1}{n} < x$$

donc

$$y \in ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$$

ainsi

$$y \in \cup_{x \in A} ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$$

donc

$$A^n \subset \cup_{x \in A} ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$$

Réciproquement, soit  $y \in \cup_{x \in A} ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$  alors il existe  $x \in A$  tel que  $y \in ]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[$  donc  $x + \frac{1}{n} > y$  et  $x - \frac{1}{n} < y$  donc  $]y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}[ \cap A \neq \emptyset$  donc  $y \in A^n$ . Conclusion :

$$A^n \subset \cup_{x \in A} \left] x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right[$$

3. Selon la question précédente,  $A^n$  est une réunion d'ouverts. Donc  $A^n$  est un ouvert.

4. Selon la question 1,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , on a  $\overline{A} \subset A^n$  donc

$$\overline{A} = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$$

5. Soit  $A$  un fermé. Alors  $A = \overline{A}$ . Selon la question précédente on a alors

$$A = \cap_{n \in \mathbb{N}^*} A^n$$

Selon la question 3, tous les  $A^n$  sont des ouverts. Par ailleurs  $\mathbb{N}^*$  est dénombrable, en conséquence  $A$  est l'intersection dénombrable d'ensembles fermés.

Cela n'est plus vrai si on remplace dénombrable par fini. Il suffit de prendre comme contre exemple n'importe quel fermé qui n'est pas ouvert (c'est-à-dire n'importe quel fermé qui n'est ni  $\mathbb{R}$  ni  $\emptyset$ ) en effet l'intersection finie d'ouverts est un ouvert.

## Exercice VI

1. Soit  $x \in A \cap \overline{B}$ . Comme  $x \in \overline{B}$ , il existe  $(u_n)$  suite d'éléments de  $B$  qui converge vers  $x$ . D'autre part, comme  $x \in A$  et que  $A$  est ouvert, il existe  $\varepsilon > 0$  tel que  $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \subset A$ . Comme  $\lim u_n = x$ , il existe un rang  $N$  tel que  $n > N$  entraîne  $|u_n - x| < \varepsilon$ . Donc pour  $n > N$  on a  $u_n \in A$ . Par suite  $u_n \in A \cap B$ . Il existe donc une suite d'éléments de  $A \cap B$  (par exemple la suite extraite de  $(u_n)$  des termes dont l'indice est strictement supérieur à  $N$ ) qui converge vers  $x$ . Donc  $x \in \overline{A \cap B}$ . Ainsi  $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$

2. L'inclusion  $A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}$  n'est pas vraie sans l'hypothèse  $A$  ouvert comme le montre le contre-exemple suivant :  $A = ]0, 1]$  et  $B = ]1, 2[$ .
3. Il suffit de prendre  $A = ]0, 2[ \cup ]3, 4[$  et  $B = ]1, 3[$ .

## Exercice VII

1. L'élément  $x$  appartient à  $(A \cup B)^*$  implique les 6 lignes suivantes :

$$\begin{aligned} \exists \varepsilon > 0, ]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap (A \cup B) &= \{x\} \\ \exists \varepsilon > 0, (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap A) \cup (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap B) &= \{x\} \\ \exists \varepsilon > 0, (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap A) = \{x\} \text{ ou } (]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap B) &= \{x\} \\ x \in A^* \text{ ou } x \in B^* & \\ x \in A^* \cup B^* & \end{aligned}$$

Ainsi  $(A \cup B)^* \subset A^* \cup B^*$ . L'inclusion réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple suivant

$$A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

en effet  $A^* = \emptyset$  et  $B^* = \emptyset$  donc  $A^* \cup B^* = \emptyset$  pourtant  $(A \cup B)^* = \mathbb{R}$ .

2. Soit  $x \in (A^* \cap B^*)$  alors  $x \in A^*$  et  $x \in B^*$  donc

$$\begin{cases} \exists \varepsilon_1 > 0, ]x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1[ \cap A = \{x\} \\ \exists \varepsilon_2 > 0, ]x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2[ \cap B = \{x\} \end{cases}$$

posons alors  $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[ \cap (A \cap B) = \{x\}$$

donc  $x \in (A \cap B)^*$ . Ainsi  $A^* \cap B^* \subset (A \cap B)^*$ . L'inclusion réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple suivant

$$A = \{0\}, B = \mathbb{R}$$

en effet  $A^* = A$  et  $B^* = \emptyset$  donc  $A^* \cap B^* = \emptyset$  pourtant  $(A \cap B)^* = A^* = \{0\}$ .