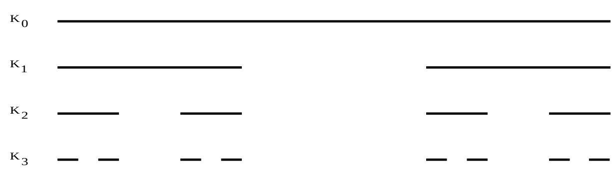
Pôle Universitaire Léonard de Vinci — S2 – Année 2003-2004
CS 103 – Analyse I — Promotion ESILV 2008

Feuille d'exercices 7

Interieur et Adhérence

Exercice I

On considére le procédé de construction suivant : on part de l'intervalle $K_0 = [0;1]$, on le divise en trois intervalles égaux et on retire l'intervalle central ouvert (c'est-à-dire l'intervalle $]\frac{1}{3}; \frac{2}{3}[$). Il reste un ensemble K_1 constitué de 2 intervalles fermés de longueur $\frac{1}{3}$. Pour chacun de ces deux intervalles on réitère le processus. Cela donne 4 intervalles fermés de longueurs $\frac{1}{9}$ (noté K_2). En continuant ce processus indéfiniment $(K_3, K_4, \ldots)$ on obtient *l'ensemble triadique de Cantor*[1] K.



1. Donner une définition rigoureuse de K.

2. K est-il ouvert ? Est-il fermé ?

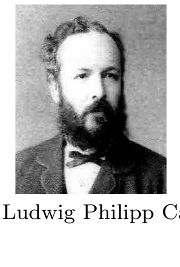
3. Démontrer que K est consitué exactement des $x \in [0;1]$ dont un développement ternaire ne comporte que des 0 et des 2.

4. Montrer que K n'est pas dénombrable (indication : on pourra trouver une surjection de K dans $[0;1]$ et utiliser les feuilles d'exercices précédentes).

5. En déduire que $\overset{\circ}{K} = \emptyset$.

---

[1] Ferdinand Cantor, mathématicien Germano-Russe, jetta en 1872 les bases de la *théorie des ensembles*. Par ensemble, on entend alors "un groupement en un tout d'objets bien distincts de notre intuition ou de notre pensée". Mais l'utilisation des ensembles sans l'aide de règles précises conduit rapidement à des paradoxes. Le paradoxe "le barbier rase tous les hommes du village qui ne se rasent pas eux-même, mais le barbier se rase-t-il lui-même ?" considéré au début comme un problème amusant, provoque une crise des fondements. En effet sous une forme mathématique, la notion de l'ensemble des ensembles qui ne sont pas élément d'eux-même est contradictoire. Le point de vue intuitif recèle le danger de considérer comme ensembles des collections d'objets qui ne sont pas définis par des propriété mathématiques. Les difficultés rencontrées dans la théorie des ensembles de Cantor seront clarifiées par l'axiomatisation de cette dernière. La première axiomatisation est due à Zermelo, en 1908, elle est améliorée par Fraenkël et Skolem en 1922 et 1923.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

Exercice II

Pour chacun des ensembles suivants, indiquez l'intérieur et l'adhérence.

$$\begin{array}{lcllcllcl} A &=& \cup_{n=1}^{+\infty}\{\frac{1}{n}\} & B &=& A\cup\{0\} & C &=&]0,1]\cup\{0;2;4\} \\ D &=& [1,2] & E &=&]0,1[\cup\{2\} & F &=&]-\infty,0]\cup\{-1;2\} \\ G &=& \mathbb{Q} & H &=& \mathbb{R}^* & I &=& \cup_{n=1}^{+\infty}]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[\\ J &=&]-1,0[\cup]0,1[& K &=& \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} & L &=& \mathbb{Z} \end{array}$$

Exercice III

Montrer que si $A\subset B$ alors $\mathring{A}\subset\mathring{B}$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice IV

Montrer que si $A\subset B$ alors $\overline{A}\subset\overline{B}$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice V

Comparer $\overset{\circ}{\overbrace{(A\cup B)}}$ et $\mathring{A}\cup\mathring{B}$. Même question pour $\overset{\circ}{\overbrace{(A\cap B)}}$ et $\mathring{A}\cap\mathring{B}$.

Exercice VI

Comparer $\overline{(A\cup B)}$ et $\overline{A}\cup\overline{B}$. Même question pour $\overline{(A\cap B)}$ et $\overline{A}\cap\overline{B}$.

Exercice VII

1. Soit f et g les applications définies de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par

$$f(X)=\mathring{\overline{X}} \quad \text{et} \quad g(X)=\overline{\mathring{X}}$$

Montrer que $f\circ f=f$ et $g\circ g=g$.

2. Donner l'exemple d'un ensemble $A\subset\mathbb{R}$ pour lequel les ensembles

$$A,\ \overline{A},\ \mathring{\overline{A}},\ \overline{\mathring{\overline{A}}},\ \mathring{A},\ \overline{\mathring{A}},\ \mathring{\overline{\mathring{A}}}$$

sont deux à deux distincts.

3. Montrer qui si l'on prend l'adhérence ou l'interieur de l'un des ensembles ci-dessus, on retrouve l'un de ces ensembles.