

Correction des exercices de la feuille 6

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice VII

Supposons que A ou B est ouvert. Sans perte de généralité on peut supposer que c'est A .

- Si A ou B est vide alors $A + B$ est vide, dans ce cas A ou B ouvert implique $A + B$ ouvert.
- Sinon, soit $x \in A + B$. Il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $x = a + b$. Comme A est ouvert, $\exists \varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset A$. Alors $]a + b - \varepsilon, a + b + \varepsilon[\subset A + B$, ce qui donne

$$]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset A + B$$

donc $A + B$ est voisinage de x . Ainsi $A + B$ est un ouvert.

La réciproque est fautive comme le montre le contre-exemple suivant : $A = [0, +\infty[$, $B =]-\infty, 0]$,
 $A + B = \mathbb{R}$.