Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2008

Feuille d'exercices 4

Séries numériques, II

Exercice I

Soit α et β deux réels. On se propose de déterminer la nature de la série suivante en fonction de α et β.

$$S = \sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^{\alpha} \ln(n)^{\beta}}$$

Cette série s'appelle série de Bertrand[1].

1. Etudier la convergence de S si $\alpha > 1$ ou si $\alpha < 1$.

2. On se place dans le cas $\alpha = 1$. Montrer que si $\beta \leq 0$ alors la série diverge.

3. On suppose que $\alpha = 1$ et $\beta > 0$. Soit f_{β} la fonction définie par

$$f_{\beta}(s) = \frac{1}{x \ln(x)^{\beta}}$$

Determiner une primitive F_{β} de la fonction f_{β} (on pourra distinguer les cas $\beta = 1$ et $\beta \neq 1$).

4. Etudier la convergence de S dans le cas $\alpha = 1$ et $\beta > 0$.

5. Ennoncez une régle générale en fonction de α et β.

Exercice II

Quelle est la nature de la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

[1] Joseph Bertrand, mathématicien Français du XIXe siècle est surtout connu pour ses travaux en géométrie différentielle et théorie des probabilités. En 1845 il conjectura que pour tout entier $n > 3$, il y a au moins un nombre premier entre n et $2n - 2$. Ce résultat fut démontré en 1850 par Chebyshev.

Joseph Louis François Bertrand (1822-1900)

Exercice III

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

2. Simplifier le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par

$$u_n = \sum_{j=1}^{n}(j^3 - \cos(j)) + \sum_{i=0}^{n} \cos(i)$$

3. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n u_n}{n^5}$ est-elle convergente ? Est-elle absolument convergente ?

Exercice IV

Quelle est la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1+n\sin n}{n^3}$?

Exercice V

1. Soit (a_n) une suite d'entiers dans $[0;9]$, montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

converge vers un réel x de $[0;1]$. On appellera *développement décimal* de x la suite des (a_n), et on notera $x = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}$

2. Réciproquement, soit $x \in [0;1]$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers (a_n) dans $[0;9]$ telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

3. Pour $x \in [0;1]$, cette suite est-elle toujours unique ?

4. Démontrer que $[0;1]$ n'est pas dénombrable (Indication : supposer qu'il existe une bijection de $\mathbb{N}$ dans $[0,1]$ et construire un réel de $[0,1]$ qui n'est l'image d'aucun entier.)

5. En déduire que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice VI

1. Soit (a_n) une suite d'éléments de $\{0;1;2\}$, montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$ converge vers un réel x de $[0;1]$. On appellera *développement ternaire* de x la suite des (a_n), et on notera $x = \overline{0, a_1 a_2 a_3 \ldots}^{3}$.

2. Réciproquement, soit $x \in [0;1]$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers (a_n) avec $a_n \in \{0;1;2\}$ et $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}$.

3. Pour $x \in [0;1]$, cette suite est-elle toujours unique ?