Feuille d'exercices 3

Séries numériques, I

Exercice I

1. Montrer, par récurrence, que

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Les sommes précédentes dépendent-elles de i ? de n ?

3. Que vallent les sommes suivantes ?

$$\sum_{j=1}^{n} i, \quad \sum_{j=1}^{n} j, \quad \sum_{t=1}^{n} t, \quad \sum_{t=1}^{n} t^2$$

Exercice II

Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{2^p} \text{ pour } n = 2p \\ u_n = \frac{1}{2^{p+1}} \text{ pour } n = 2p-1 \end{cases}$$

Etudier cette série successivement par la règle de Cauchy puis par la règle de d'Alembert[1].

Exercice III

Calculer les sommes partielles des séries suivantes et en déduire leur nature. En cas de convergence trouver leur valeur.

[1] Jean d'Alembert, mathématicien français du XVIIIe siècle, fut l'un des premiers a étudier les équations différentielles et à les utiliser en physique. Ses travaux en analyse sont importants. En 1754 dans l'article *Différentiel* du volume IV de *L'Encyclopedie* il suggère la mise en place de bases fermes pour la notion de limite. Le nom de d'Alembert est également associé au théorème de Gauß-d'Alembert, dont une formulation moderne est : " tout polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ à n racines complexe s comptées avec leur multiplicité."

Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783)

1. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{2(n+3)(n+2)}$

2. $\sum\limits_{n\geq 1} \ln(1+\frac{4n+4}{n^2})$

Exercice IV

Determiner la nature des séries de terme général (u_n)

1. $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$

2. $u_n = 1 - \cos(\frac{1}{n})$

3. $u_n = \frac{e^n}{n!}$

4. $u_n = \sin(\frac{1}{n^4})$

5. $u_n = \frac{1}{n3^n}$

6. $u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^3+n^2}$

7. $u_n = \frac{(n!)^3}{(3n)!}3^n$

Exercice V

Determiner la nature des séries de terme général (u_n)

1. $u_n = \frac{(-1)^n}{2n}$

2. $u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2-1}$ pour $n \geq 2$

Exercice VI

1. En considérant la suite géométrique de premier terme 1 et de raison e^i montrer que

$$\sum_{j=0}^{n} \cos(j) = \frac{\cos(\frac{n}{2})\sin(\frac{n+1}{2})}{\sin(\frac{1}{2})}$$

2. Determiner la nature des séries de terme général (u_n) définie par $u_n = \frac{\cos(n)}{n}$

Exercice VII

Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ et $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

1. La série est-elle convergente ? Absolument convergente ?

2. Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ la fonction définie par $\sigma(3j+1) = 2j+1$, $\sigma(3j+2) = 4j+2$, $\sigma(3j+3) = 4j+4$. Montrer que σ est une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$.

3. On pose $v_n = u_{\sigma(n)}$. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} v_n = \frac{1}{2}S$. Comment expliquez-vous ce résultat ?