Correction des exercices de la Feuille 1

Exercices non corrigés en travaux dirigés

Exercice III

Soit $A \in \mathbb{R}$.

- Si $A \leq 0$ alors $e^{2n+1} > A$ est toujours vrai puisque $e^{2n+1} > 0$. Posons alors $N = 0$.
- Sinon $A > 0$ posons alors $N = \mathrm{E}(\frac{\ln(A)-1}{2}) + 1$ (ou 0 si cette quantité est négative) alors $n > N$ entraine les 3 lignes suivantes

$$n > \frac{\ln(A) - 1}{2}$$

$$2n + 1 > \ln A$$

$$e^{2n+1} > A$$

donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N},\ n > N \Rightarrow e^{2n+1} > A$ ce qui montre que $\lim e^{2n+1} = +\infty$.

Exercice VI

1. Considérons la fonction f définie sur $[8, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$$

Cette fonction est dérivable comme quotient de fonctions dérivables non nulles sur son domaine de définition, on a

$$f'(x) = \frac{(\ln x)^2 - 2\ln x}{(\ln x)^4} = \frac{(\ln x)(\ln x - 2)}{(\ln x)^4}$$

On sait que $\ln 8 > 2$ donc $f'(x) > 0$ donc f est croissante. Par suite (v_n) est croissante des que $n \geq 8$.

2. On a $v_8 = \frac{8}{(\ln 8)^2}$. Comme $\frac{8}{(\ln 8)^2} > 1$ on a $v_8 > 1$. Comme (v_n) est croissante on en déduit que $v_n \geq v_8 > 1$ lorsque $n \geq 8$. Ainsi $\frac{n}{(\ln n)^2} \geq 1$, donc $n \geq (\ln n)^2$.

3. Soit $A \in \mathbb{R}$. Posons $N = \max\{8; \mathrm{E}(e^A)+1\}$, alors pour $n \geq N$ on a $n \geq e^A$ donc $\ln n \geq A$ donc $\ln n(\ln n - A) \geq 0$ donc $(\ln n)^2 - A\ln n \geq 0$ Or comme $n \geq 8$ on a $n \geq (\ln n)^2$ ainsi $n - A\ln n \geq 0$ donc $n \geq A\ln n$ d'où finalement $\frac{n}{\ln n} \geq A$. On a montré que

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N},\ n \geq N \Rightarrow u_n \geq A$$

ainsi $\lim \frac{n}{\ln n} = +\infty$.