Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2008 F

Interrogation du 27/04/2004

Corrigé

Exercice I

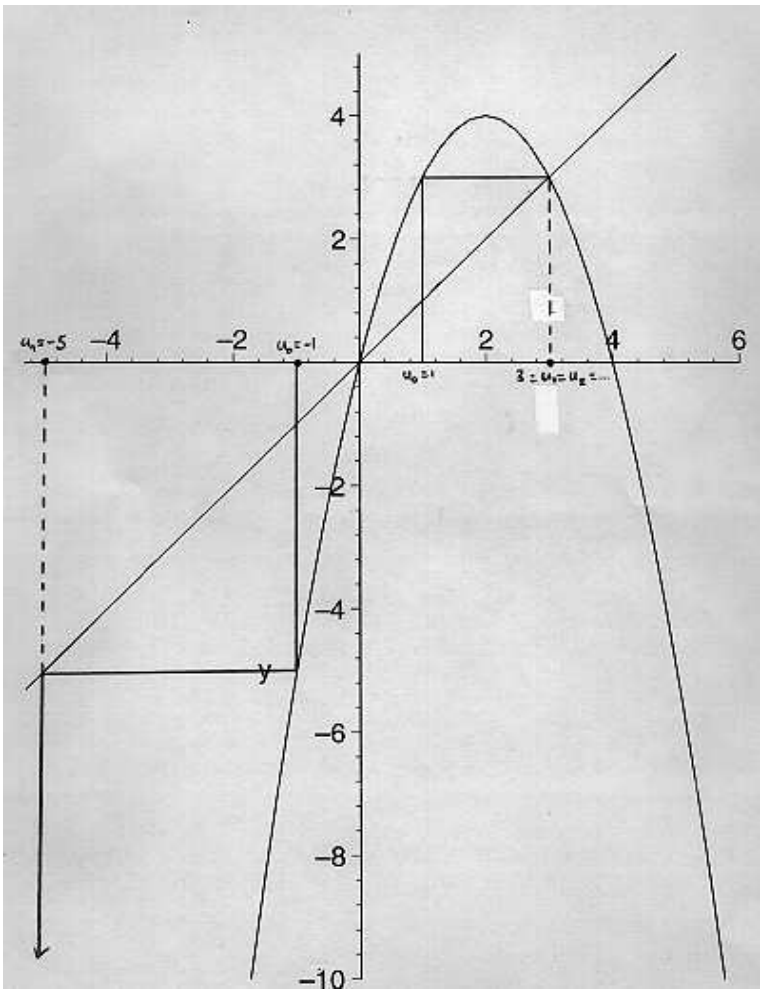
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - x^2$.

1. Le réel e est un équilibre de (1) si et seulement si $f(e) = e$ si et seulement si $e^2 - 3e = 0$ si et seulement si $e = 0$ ou $e = 3$.

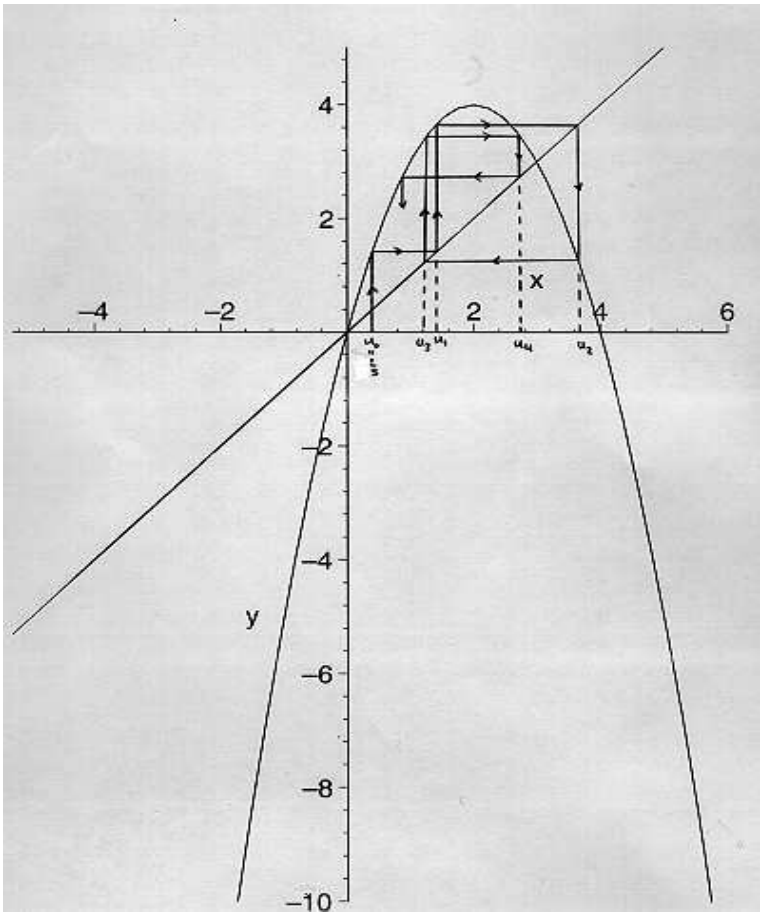
2. La fonction f est dérivable et $f'(x) = 4 - 2x$.

- $|f'(0)| = 4 > 1$ donc 0 est un équilibre instable
- $|f'(3)| = |-2| > 1$ donc 3 est un équilibre instable

3. Les suites issues des conditions initiales $u_0 = -1$ et $u_0 = 1$ sont présentées ci-dessous. Remarquons que la suite est constante à partir du second terme dans ce dernier cas.



La suite issue de la condition initiale $u_0 = \frac{1}{5}$ est présentée ci-dessous.



Exercice II

1. Soit $u_n = \frac{5^n}{(n!)^2}$, cette suite est à termes strictement positifs et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}(n!)^2}{(5^n(n+1)!)^2} = \frac{5(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2} = \frac{5}{(n+1)^2}$$

ainsi $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0 < 1$. Le critère de d'Alembert permet de conclure que la série associée converge.

2. Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$. Posons $a_n = (-1)^n$ et $b_n = \frac{1}{\ln n}$ alors $u_n = a_n b_n$ et

i) $b_n \geq 0$

ii) (b_n) est décroissante

iii) $\lim b_n = 0$

iv) Pour tout p et q entiers supérieurs à 2 tels que $q > p$ on a $\sum_{n=p}^{q} a_n \in \{-1; 0; 1\}$ donc

$$\left| \sum_{n=p}^{q} a_n \right| \leq 1$$

Le théorème d'Abel permet de conclure que la série associée converge.

Exercice III

1. Soit (P_n) la proposition $u_n \in]0,1[$

- (P_0) est vraie par hypothèses.
- Supposons (P_n) vraie alors $u_n \in]0,1[$ donc $1-u_n \in]0,1[$ donc $u_{n+1} = u_n(1-u_n) \in]0,1[$ ainsi (P_{n+1}) est vraie.

2. On a (u_n) strictement positive et

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - u_n < 1$$

donc (u_n) est décroissante. Comme (u_n) est minorée (par 0) elle converge.

Notons $a = \lim u_n$ alors $\lim u_{n+1} = a$ donc $a = a - a^2$ donc $a = 0$. Ainsi (u_n) converge vers 0.

3. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $u_n^2 = u_n - u_{n+1}$ donc

$$\sum_{n=0}^{N} u_n^2 = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_{n+1} = \sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=1}^{N+1} u_n = u_0 - u_{N+1}$$

Comme (u_n) converge vers 0, il vient $\lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n^2 = u_0$.

4. Raisonnons par l'absurde. Supposons que la série de terme général (u_n) converge. Notons $l = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. Soit $N \in N$ on alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 - u_n = u_0 - l$$

d'autre part on a $u_n^2 - u_n = -u_{n+1}$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 - u_n = -\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} = -l$$

donc

$$u_0 - l = -l$$

par suite $u_0 = 0$ ce qui est impossible.

5. On a $v_n = \ln(1-u_n)$ ainsi

$$\frac{v_n}{u_n} = \frac{\ln(1-u_n)}{u_n}$$

comme $\lim u_n = 0$ on a $\lim \frac{\ln(1-u_n)}{u_n} = \frac{1}{1-0} = 1$ donc $\lim \frac{v_n}{u_n} = 1$. D'autre part (u_n) et (v_n) ne s'annullent pas. Il en résulte $(u_n) \sim (v_n)$. En outre, elles sont de signe constant.

La série de terme général (u_n) diverge, en vertu du théorème d'équivalence, la série de terme général (v_n) diverge également.