

Devoir 3

corrigé

Exercice I

1. Soit $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n^{a,u}$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_{n_0}$. Donc $x > a + u_{n_0} > a$, ainsi $x \in]a, +\infty[$. Par suite

$$x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n^{a,u} \subset]a, +\infty[$$

De manière analogue, soit $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n^{a,u}$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \in J_{n_0}$. Donc $x \geq a + u_{n_0} > a$, ainsi $x \in]a, +\infty[$. Par suite

$$x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n^{a,u} \subset]a, +\infty[$$

2. Soit $x \in]a, +\infty[$. Notons $\varepsilon = x - a$ alors $\varepsilon > 0$. La suite (u_n) converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraîne $|u_n| < \varepsilon$. En particulier $|u_N| < \varepsilon$. Par suite $u_N < \varepsilon$, donc $a + u_N < \varepsilon + a$, d'où $x \in I_N$. Comme $I_N \subset J_N$ on en déduit $x \in J_N$.

3. Soit $x \in]a, +\infty[$. En vertu de la question précédente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_N$ donc $x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n^{a,u}$. Cela démontre que

$$]a, +\infty[\subset \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n^{a,u}$$

La question 1 permet alors de conclure que

$$x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} I_n^{a,u} =]a, +\infty[$$

En remplaçant I_N par J_N dans cette démonstration, on obtient de même

$$x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n^{a,u} =]a, +\infty[$$

Exercice II

1. Remarquons que la démonstration de l'exercice I s'adapte sans difficulté au cas des intervalles

$$I_n'^{a,u} =]-\infty, a - u_n[\quad \text{et} \quad J_n'^{a,u} = [-\infty, a - u_n]$$

On obtient

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} I_n'^{a,u} = \cup_{n \in \mathbb{N}} J_n'^{a,u} =]-\infty, a[$$

Les ensembles considérés s'écrivent alors

$$\begin{aligned} A_n &= I_n'^{a,u} \cup I_n^{b,v} \\ B_n &= I_n'^{a,u} \cup J_n^{b,v} \\ C_n &= J_n'^{a,u} \cup I_n^{b,v} \\ D_n &= J_n'^{a,u} \cup J_n^{b,v} \end{aligned}$$

si bien que

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} B_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} C_n = \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n =]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 x \in \cap_{n \in \mathbb{N}}]a - u_n, b + v_n[&\iff x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} \setminus D_n) \\
 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R} \setminus D_n \\
 &\iff \forall n \in \mathbb{N}, x \notin D_n \\
 &\iff \text{non}(\exists n \in \mathbb{N}, x \in D_n) \\
 &\iff \text{non}(x \in \cup_{n \in \mathbb{N}} D_n) \\
 &\iff \text{non}(x \in]-\infty, a[\cup]b, +\infty[) \\
 &\iff x \in [a, b]
 \end{aligned}$$

Ainsi

$$x \in \cap_{n \in \mathbb{N}}]a - u_n, b + v_n[= [a, b]$$

Il convient de remarquer que si $a = b$ alors $[a, b] = \{a\}$.

De manière analogue on obtient

$$\begin{aligned}
 x \in \cap_{n \in \mathbb{N}}]a - u_n, b + v_n[&= [a, b] \\
 x \in \cap_{n \in \mathbb{N}}]a - u_n, b + v_n] &= [a, b] \\
 x \in \cap_{n \in \mathbb{N}} [a - u_n, b + v_n] &= [a, b]
 \end{aligned}$$

Exercice III

1.

Première méthode : Application de l'exercice II. Soit $a = b = 0$ et $u_n = v_n = \frac{1}{n+1}$. En vertu de l'exercice II on a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} \right[= \{0\}$$

donc

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

Deuxième méthode : Calcul direct. Commençons par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $0 \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ si bien que

$$\{0\} \subset \cap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in \cap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$.

Raisonnons par l'absurde. **Supposons** $x \neq 0$ alors posons $N = E(\frac{1}{|x|}) + 1$ on a $\frac{1}{N} < |x|$ ainsi $x \notin]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}[$ donc $x \notin \cap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$. **Contradiction.** (fin du raisonnement par l'absurde)

Ainsi $\cap_{n \in \mathbb{N}^*}]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\subset \{0\}$ et finalement

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \left] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right[= \{0\}$$

2. Chaque ensemble $] -\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[$ est un intervalle ouvert, donc un ouvert. Pourtant $\{0\}$ n'est pas un ouvert puisqu'il n'est pas voisinage de 0 ($\forall \varepsilon > 0,]-\varepsilon, \varepsilon[\not\subset \{0\}$). Une intersection d'ouverts peut ne pas être un ouvert.