

Devoir 2

Corrigé

Exercice I

1. On a

$$\begin{aligned} T_N &= \sum_{n=0}^N \left| \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k \right| \\ &\leq \sum_{n=0}^N \sum_{k=0}^n |u_{n-k}| |v_k| = \sum_{n=0}^N \sum_{(p,q) \in D_n} |u_p| |v_q| = \sum_{(p,q) \in J_N} |u_p| |v_q| \end{aligned}$$

2. On a $J_N \subset \Delta_N$ et $|u_p v_q| \geq 0$ donc

$$\sum_{(p,q) \in J_N} |u_p v_q| \leq \sum_{(p,q) \in \Delta_N} |u_p v_q|$$

donc

$$\sum_{(p,q) \in J_N} |u_p v_q| \leq \sum_{(p,q) \in \Delta_N} |u_p| |v_q|$$

or

$$\sum_{(p,q) \in \Delta_N} |u_p| |v_q| = R_N S_N$$

donc

$$T_N \leq R_N S_N$$

3. Comme (R_N) et (S_N) convergent, $R_N S_N$ est majoré. Donc (T_N) est majorée. De plus (T_N) est croissante. Ainsi (T_N) converge : la série $\sum_{n \geq 0} w_n$ est absolument convergente.

Il convient de remarquer que $\Delta_{E(N/2)} \subset J_N$ et donc, de manière analogue, on a $R_{E(N/2)} S_{E(N/2)} \leq T_N \leq R_N S_N$. Le théorème des gendarmes permet de conclure que $\lim T_N = \lim R_N \lim S_N$.

4. On a

$$\left| \left(\sum_{n=0}^N u_n \right) \left(\sum_{n=0}^N v_n \right) - \sum_{n=0}^N w_n \right| = \left| \sum_{(p,q) \in \Delta_N \setminus J_N} u_p v_q \right| \leq \sum_{(p,q) \in \Delta_N \setminus J_N} |u_p| |v_q| \leq R_N S_N - T_N$$

comme $\lim R_N S_N - T_N = 0$ il vient $\lim |R_N S_N - T_N| = 0$. Or $\lim R_N S_N = \left(\sum_{n \geq 0} u_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} v_n \right)$ ainsi $\lim T_N = \left(\sum_{n \geq 0} u_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} v_n \right)$ donc

$$\left(\sum_{n \geq 0} u_n \right) \left(\sum_{n \geq 0} v_n \right) = \sum_{n \geq 0} w_n$$

Exercice II

1. Si $a = 0$ alors la convergence de la série est triviale. Supposons $a \neq 0$ alors la suite de terme général $|A_n|$ est strictement positive et

$$\frac{|A_{n+1}|}{|A_n|} = \frac{|a^{n+1}|}{|a^n|} \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|a|}{n+1}$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_{n+1}|}{|A_n|} = 0 < 1$, par suite le théorème de d'Alembert permet d'affirmer que la série $\sum_{n \geq 0} |A_n|$ converge donc $\sum_{n \geq 0} A_n$.

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et N un entier naturel non nul, alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \left(1 + \sum_{n=1}^N \frac{a^n}{n!} \right) &= \sum_{n=1}^N \frac{d}{da} \frac{a^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{na^{n-1}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^N \frac{a^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{a^n}{n!} \end{aligned}$$

En faisant tendre N vers $+\infty$, il vient

$$f'(a) = f(a)$$

Comme cette égalité est vraie pour tout réel a , on en déduit que $f' = f$.

3. Lorsque $a = 0$ alors $A_n = 0$ pour tout $n \geq 1$ ainsi $f(0) = A_0 = 1$.

4. La fonction f satisfait l'équation différentielle $f' = f$ donc $f(x) = \lambda \exp(x)$ où λ est une constante réelle. Or $f(0) = 1$ donc $\lambda = 1$, par suite $f = \exp$.

5. Soit a et b des réels, $A_n = \frac{a^n}{n!}$ et $B_n = \frac{b^n}{n!}$. Notons $(w_n) = (A_n) * (B_n)$. Alors

$$\begin{aligned} w_n &= \sum_{k=0}^n u_{n-k} v_k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \frac{b^k}{k!} \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{k!}{n!(n-k)!} a^{n-k} b^k \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= \frac{1}{n!} (a+b)^n \quad (\text{formule du binôme de Newton}) \end{aligned}$$

ainsi $\sum_{n \geq 0} w_n = \exp(a+b)$ ce qui établit la formule $\exp(a+b) = \exp(a) \exp(b)$.