Pôle Universitaire Léonard de Vinci
CS 103 – Analyse I

S1 – Année 2003-2004
Promotion ESILV 2008 F

Devoir 2

A rendre le 20/04/2004

Exercice I

Soit $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites telles que les séries correspondantes soient absolument convergentes. Notons $(u_n) \star (v_n) = (w_n)$ la suite définie par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k} v_k \tag{1}$$

On appelle $\star$ le produit de convolution

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, notons

$$D_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q = n\}$$

et pour $N \in \mathbb{N}$, notons

$$J_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p+q \leq N\}$$
$$\Delta_N = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \leq N,\ q \leq N\}$$
$$R_N = \sum_{n=0}^{N} |u_n|, \quad S_N = \sum_{n=0}^{N} |v_n|, \quad T_N = \sum_{n=0}^{N} |w_n|$$

Montrer que $T_N \leq \sum_{(p,q)\in J_n} |u_p||v_q|$.

2. Montrer que $T_N \leq R_N S_N$.

3. En déduire que $\sum_{n\geq 0} w_n$ est absolument convergente.

4. Montrer que

$$\left(\sum_{n\geq 0} u_n\right)\left(\sum_{n\geq 0} v_n\right) = \sum_{n\geq 0} w_n$$

Exercice II

Soit a un réel et (A_n) la suite définie par $A_n = \frac{a^n}{n!}$ pour $n \neq 0$ et $A_0 = 1$.

1. Montrer que la série de terme général (A_n) converge. On note $f(a)$ sa limite.

2. Montrer que $f' = f$

3. Montrer que $f(0) = 1$.

4. Montrer que $f = \exp$

5. Soit a et b deux réels, en utilisant l'exercice I, redémontrer que

$$\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$$