

Devoir 1

Corrigé

Exercice I

1. Sur $] -1, +\infty[$, la fonction f est dérivable comme composée de fonctions dérivables. On a

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}$$

donc $f'(0) = 1$. Par suite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1$ donc

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

or $\lim \frac{1}{n} = 0$ donc

$$\lim \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

ce qui démontre le résultat.

2. On a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$$

donc

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$ alors

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)\right) = \exp\left(a \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}}\right)$$

or $\lim \frac{a}{n} = 0$ donc $\lim \frac{\ln\left(1 + \frac{a}{n}\right)}{\frac{a}{n}} = 1$, par suite

$$\lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

Soit maintenant $\alpha \in]0, +\infty[$, posons $a = \ln \alpha$, on a $a \in \mathbb{R}$ et

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{\ln \alpha} = \alpha$$

ce qui établit que

$$\forall \alpha \in]0, +\infty[, \exists a \in \mathbb{R}, \alpha = \lim \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n$$

4. On utilise un raisonnement analogue

Première limite. On a

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right) = \exp\left(\frac{1}{n} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right)$$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}} = 1$ par suite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^0 = 1$$

Deuxième limite. On a

$$\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \exp\left(\sqrt{n} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\right)$$

or $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$, comme $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = +\infty$$

Exercice II

1. Notons $l = l_1 + \dots + l_p$ et considérons $\varepsilon > 0$. Pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, la suite (u_n^i) converge vers l_i donc il existe $N_i \in \mathbb{N}$ tel que

$$n \geq N_i \implies |u_n^i - l_i| \leq \frac{\varepsilon}{p}$$

Soit $N = \max\{N_1, \dots, N_p\}$ alors

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, n \geq N \implies |u_n^i - l_i| \leq \frac{\varepsilon}{p}$$

donc $n \geq N \implies |u_n^1 - l_1| + |u_n^2 - l_2| + \dots + |u_n^p - l_p| \leq p \frac{\varepsilon}{p} = \varepsilon$ ainsi

$$\begin{aligned} |u_n - l| &\leq |(u_n^1 + \dots + u_n^p) - (l_1 + \dots + l_p)| \\ &\leq |(u_n^1 - l_1) + \dots + (u_n^p - l_p)| \\ &\leq |u_n^1 - l_1| + \dots + |u_n^p - l_p| \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon$$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = l$.

2. Le résultat de ne peut pas être généralisé au cas d'une infinité de suites, même si elles convergent vers 0, comme le montre le contre-exemple suivant. Soit (u_n^i) définie par

$$u_n^i = \begin{cases} 1 & \text{si } n = i \\ 0 & \text{si } n \neq i \end{cases}$$

Considérons (u_n) somme de toutes les suites (u_n^i) avec $i \in \mathbb{N}$. On a $u_n = 1$ pour tout n , cette suite constante converge vers 1. Pourtant

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_i \in \mathbb{N}, n > N_i \implies |u_n^i| < \varepsilon$$

donc chaque suite (u_n^i) converge vers 0.